F(Y^')=0,F(X,Y^')=0DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHIMLARINI TUZISH

Gadayev Doniyor Rajabovich
JDPU, Sirtqi bo'lim, Tabiiy va aniq fanlarda masofaviy ta'lim kafedrasi o'qituvchisi

Differensial tenglamalar tabiatda yuz beradigan ko'pgina hodisalarni o'rganishning muhim usuli bo'lib o'tmishda ham hozirgi kunda ham ko'pgina olimlarning qiziqtirib kelmoqda.

Bunda asosiy masala yechimni aniqlash yoki berilgan differensial tenglamani integrallashdan iborat. Bu amalni bajarishda asosiy qiyinchiliklar yuzaga keladi. Chunki differinsial tenlamalar kamdan – kam hollarda sodda integrallanadi.

Dastlab $F(y') = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamadan

$$y' = a_k (k = 1,2, \dots)$$

tenglika ega bo'lamiz, bunda a_k o'zgarmas. So'nggi tenglamani integrallab

$$y = a_k x + c, \qquad k = 1,2, \dots$$

umumiy yechimni topamiz. Hosil qilingan yechimdan

$$a_k = \frac{y - c}{x}$$

ni aniqlaymiz. Buni berilgan tenglamaga qo'yib umumiy yechimni quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0.$

Endi

$$F(y, y') = 0 \tag{1.1}$$

tenglamani qaraymiz. Agar tenglamadan

$$y' = f_k(x), \qquad k = 1,2, \dots$$

tenglikni aniqlagan bo'lsak, u holda umumiy yechimni

$$y = \int f_k(x)dx + c, \quad k = 1,2 \dots$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Ba'zida (1.1) tenglamani parametrik ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa ya'ni quyidagi

$$x = \varphi(t), \; y' = \psi(t) \tag{1.2}$$

funksiyani topish kerak bo'lib

$$F\big(\varphi(t), \qquad \psi(t)\big) = 0$$

bo'lsin. Bu holda umumiy yechimni quyidagicha aniqlaymiz.

(1.2) tenglamadan

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

tenglika ega bo'lamiz. Bundan umumiy yechimni aniqlaymiz:

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \;\; x = \varphi(t), \tag{1.3}$$

bu yechimdan $t = t_0$ bo'lganda $x = x_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$ ni undan keyin $t = t_0$ bo'lganda $y = y_0$ larga asosan S ni aniqlab Koshi yechimini hosil qilamiz.

1. Eslatma. (1.1) – tenglama y' ga nisbatan ko'p qiymatli, $x_0 = \varphi(t)$ tenglikdan k ta $t = t_\nu(x_0)$, $\nu = 1,2,\dots,k, y' = \psi(t)$ bir qiymatli, yoki $t = t_1 = t_1(x_0)$ bitta tenglikga ega bo'lsak $y' = f_\nu(t), \nu = 1,2,\dots,k$. ko'p qiymatli bo'ladi.

(1.1)–tenglamani xususiy holi

$$x = \varphi(y') \tag{1.4}$$

bo'ladi. Bu holda

$$y' = \psi(t) \qquad (1,5)$$

deb olsak

$$x = \varphi(\psi(t)) \tag{1.6}$$

ga ega bo'lamiz. Umumiy yechimni (1.2) holdagi kabi aniqlaymiz.

Xususan $y' = t$ deb olsak. U holda

$$y = \int_{t_1}^{t} t\varphi'(t)dt + c = \phi(t) + c, \quad x = \varphi(t) \tag{1.7}$$

yechimga ega bo'lamiz.

Agar shunday a o'zgarmas mavjud bo'lib $F(a,\infty) = 0$ yoki $x' = 0$ bo'lganda $F\left(a, \frac{1}{x'}\right) = 0$ bo'lsa, u holda (1.1) tenglamaning yechimi $x = a$ bo'ladi.

Agar (1.7) tenglama $\varphi(t)$ –funksiya qandaydir $t = \tau$ bo'lganda $x = a$ qiymatni qabul qilsa, u holda barcha (1.7) yechimlar $x = a$ yechimga bog'liq bo'lgan $x = \varphi(t) = a$, $y = \phi(\tau) + c$ nuqtadan utadi,masalan

$$x = \frac{1}{1 + y'^2}, \qquad x = \frac{1}{1 + t^2}, \qquad y' = t$$

bo'lsin. U holda yechim

$$y = \int_0^t t dx + C = \int_0^t t\left(-\frac{2t}{(1 + t^2)^{\ 2}}\right)dt + C$$

bo'lib ,$x = 0$ maxsus yechim bo'ladi. Bu holda $t = \infty$ bo'lganda barcha yechimlar tug'ri chiziq nuqtasida yotadi, bu erda $\tau = \infty$.

2 – Eslatma. Agar x va y' ni xy' tekislikdagi egri chiziqning koordinatalari deb qarasek (1.1) ning hamma shoxlari (1.2) tenglama parametrik tasvirlanishini ko'ramiz.

SHunday xollar ham bulishi mumkinki (1.2) yyechimni parametr ko'rinishida ifodalash (1.1) egri chiziqning xar xil shoxlari uchun xar xil bulishi mumkin.

1–misol.

$$x^2 \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\left(x^2 + y'^2\right) = 1 - y'^2 \tag{1.8}$$

tenglamani integrallang.

Yechish. $\qquad x = \cos t\,,\ y' = \sin t \qquad (1.9)$

funksiyalar (1.8) tenglamaning parametrik tenglamasi bo'ladi.

$$y = -\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + c\,,\ \ x = \cos t \tag{1.10}$$

(1.9) tenglama

$$x^2 + y'^2 = 1$$

uchun (1.8) – tenglamani bitta shoxini ifodalaydi. Hamma shoxlarni ifodalash uchun

$x^2 + y'^2 = \tau > 0$ (1.11)

deb olamiz, bunda τ – parametr . (1.11) – ga asosan (1.8) – tenglamadan

$x^2 = -\frac{\tau-1}{tg\frac{\pi}{4}} * y'^2 = \tau + \frac{\tau-1}{tg\frac{\pi}{4}\tau-1}$ (1.12)

ni aniqlaymiz.

$0 \leq \tau < 1$ va $\tau > 1$ oraliqda τ=1 ga yaqin joyda $x^2 < 0$ bo'ladi va bundan $x = i\varphi(\tau)$ bo'lib $\tau = 1$ yaqinida y', $dy = y'dx$ mavxum bo'ladi. Bundan $x = i\varphi(\tau)$,$y = i\varphi(\tau)$ bo'lib, bunda $\varphi(\tau)$ va $\psi(\tau), \tau$ –ning har qanday qiymatida haqiqiy funsiyalar. (1.11) – ga asosan τ faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi, u holda (1.8) – tenglamaning yechimiga ega bo'lmaymiz.