УДК 517.953.5

О РЕШЕНИИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

А.Х. ЖУРАЕВ

В области $D=\{(x,y):\ 0<x,y<1\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y) \qquad (1)$$

Отметим, что уравнения (1) является сопряженным к уравнению

$$u_{xxx}+u_{yy}=F(x,y)$$

которое является линейной частью (при $\nu=0$) так называемого ВТ-уравнения, (вязкое трансзвуковое уравнение) [1,2]

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_x u_{xx}.$$

Регулярным решением уравнения (1), будем называть функцию $u(x,y)$,

которое в области D удовлетворяет уравнению (1) и принадлежит классу $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$.

Задача A_1. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=\varphi_1(x),\ u_y(x,1)=\varphi_2(x), \qquad (2)$$

$$u_{xx}(0,y)=\psi_1(y),\ u_x(1,y)=\psi_2(y),\ u_{xx}(1,y)=\psi_3(y), \qquad (3)$$

где

$$\varphi_i(x)\in C[0,1], i=1,2,\ \psi_j(y)\in C[0,1],\ j=\overline{1,3}, g(x,y)\in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D})$$

кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$g(x,0)=g(x,1)=0.$$

Аналогичная задача при условии (2) и в условиях:

$u(0,y)=\psi_1(y),\quad u(1,y)=\psi_2(y),\quad u_x(1,y)=\psi_3(y)$ рассмотрена в работе [3].

Теорема 1. Задача A_1 имеет единственное решение с точностью до постоянного слагаемого, т.е. если существует два решения, то их разность равно постоянному числу.

Доказательства. Пусть задача A_1 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является решением однородной задачи.

Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2=0. \tag{4}$$

Интегрируя тождества (4) по области D и учитывая однородные краевые условия, получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(0,y)dy+\iint_D u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда $u_y(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=f(x)$.

Поставляя уравнение (1) получим $f'''(x\ =)$. Из условий $f''(0)=f'(1)=f''(1)=0$ имеем $f(x)=C$. Отсюда $U(\ x,\ y\neq)\ \ C,-\ C$

Теорема доказана.

В работе [3] интегрируя по области D тождество

$$\varphi L[\psi]-\psi L^*[\varphi]\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi\right)$$

получено решение

$$2u(x,y)=\int_0^1\left(Gu_{\xi\xi}-G_\xi u_\xi+G_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int_0^1\left(Gu_\eta-G_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi-$$
$$-\iint_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{5}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta).$$

Здесь $U(\ x\ y\ \xi\ \eta)$ - фундаментальное решения уравнения $L[u]=0$ построенного

Т.Д. Джураевым и Ю.П. Апаковым в работе [4], которое имеет вид

$$U(x,y;\xi,\eta)=|y-\eta|^{\frac{1}{3}}f(t),\ -\infty<t<\infty,$$

где

$$f(t)=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\tau\right),\qquad \tau=\frac{4}{27}t^3,\qquad t=\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2}{3}}},$$

$\Psi(a,b;x)$ - вырожденная гипергеометрическая функция [5].

$W(x,y;\xi,\eta)$ - любое регулярное решение уравнения $L^*[W]=0$.

Построим теперь функцию Грина $G(x,y;\xi,\eta)$, которая должна обладать следующими свойствами при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$:

по переменным (x,y);

$$\begin{cases} L[G]=0, \\ G_y(x,0;\xi,\eta)=G_y(x,1;\xi,\eta)=0, \\ G_{xx}(0,y;\xi,\eta)=G_{xx}(1,y;\xi,\eta)=G_x(1,y;\xi,\eta)=0, \end{cases} \qquad (6)$$

по переменным (ξ,η);

$$\begin{cases} L^*[G]=0, \\ G_\eta(x,y;\xi,0)=G_\eta(x,y;\xi,1)=0, \\ G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)=G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)=G_\xi(x,y;0,\eta)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Для этих целей решаем следующую вспомогательную задачу:

Задача A_2. Найти регулярное решение в области D уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям:

$$u_y(x,0)=0, \quad u_y(x,1)=0, \qquad 0<x<1, \qquad (8)$$

$$u_{xx}(0,y)=u_x(1,y)=u_{xx}(1,y)=0, \quad 0<y<1. \qquad (9)$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде [6]

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\cos k\pi y. \qquad (10)$$

Функцию $g(x,y)$ можно разложить по системе $\{\cos k\pi y\}$ собственных функций:

$$g(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\cos k\pi y\ , \qquad (11)$$

где

$$g_k(x)=2\int_0^1 g(x,y)\cos k\pi y dy\ .$$

Подставляя (10),(11) в (1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(X_k'''(x)+\lambda_k^3 X_k(x)-g_k(x)\right)\cos k\pi y=0.$$

Для нахождения функции $X_k(x)$ приходим следующую задачу:

$$\begin{cases} L[X_k]\equiv X_k'''(x)+\lambda_k^3 X_k(x)=g_k(x), \\ X_k''(0)=X_k'(1)=X_k''(1)=0, \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$\lambda_k^3=(k\pi)^2.$$

Решение задачи (12) будем искать методом построения функции Грина $G_k(x,\xi)$ [7], которая обладает следующими свойствами:

1. $G_k(x,\xi)$ непрерывно и имеет непрерывную производную по x при $0 \le x \le 1$.

2. Её вторая производная по x в точке $x=\xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен 1, т.е.

$$\left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi-0} = 1.$$

3. В каждом из интервалов $0 \le x < \xi$ и $\xi < x \le 1$ функция, $G_k(x,\xi)$ рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения

$$L[G_k] = \frac{\partial^3 G_k}{\partial x^3} + \lambda_k^3 G_k = 0.$$

4. $G_{kxx}(0,\xi) = G_{kx}(1,\xi) = G_{kxx}(1,\xi) = 0$.

Функция Грина задач (12) имеет вид:

$$G_k(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\left\{2e^{-\frac{1}{2}(\xi+2x)\lambda_k}\cos\beta_k\xi + 2e^{-\frac{1}{2}(3-2\xi+2x)\lambda_k}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$+2e^{-\frac{1}{2}(3-2\xi-x)\lambda_k}\cos\beta_k(x-1) + 4e^{-\frac{1}{2}(\xi-x+3)\lambda_k}\cos\beta_k\xi\cos\beta_k(x-1)+$$

$$+2e^{-\frac{1}{2}(\xi-x)\lambda_k}\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)-$$

$$\left.-4e^{-\frac{1}{2}(\xi-x+3)\lambda_k}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)\right\}, \qquad 0 \le x \le \xi,$$

(13)

$$G_k(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\left\{e^{-(x-\xi)\lambda_k} + 2e^{-\left(\frac{1}{2}\xi+x\right)\lambda_k}\cos\beta_k\xi+\right.$$

$$\left.+2e^{-\frac{1}{2}(3-2\xi-x)\lambda_k}\cos\beta_k(x-1) + 4e^{-\frac{1}{2}(3+\xi-x)\lambda_k}\cos\beta_k\xi\cos\beta_k(x-1)\right\}, \qquad \xi \le x \le 1.$$

$$\beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k, \quad \bar{\Delta} = 3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Легко можно, убедится, что функции определенная формулой (13) обладает всеми свойствами, сформулированными при определении функции Грина.

Решение задачи A_2 имеет вид

$$X_k(x) = \int_0^1 G_k(x,\xi)\, g_k(\xi)\, d\xi. \qquad (14)$$

Тогда по формуле (10), учитывая (14) решение задачи A_1 принимает вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 G_k(x,\xi)g_k(\xi)\,d\xi\cos\pi ky=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\cos\pi ky\,g_k(\xi)\,d\xi\,.$$

(15)

Если функция $u(x,y)$ и его производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся равномерно, в области D, то функция $u(x,y)$ даёт решение задачи A_1.

Найдём оценки функции (15):

$$|u(x,y)|\le\left|\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\cos\pi ky\,g_k(\xi)\,d\xi\right|\le$$

$$\le\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(x,\xi)||\cos\pi ky||g_k(\xi)|\,d\xi\le\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(x,\xi)||g_k(\xi)|\,d\xi. \tag{16}$$

При сделанных предположениях относительно $g(x,y)$ имеет место неравенство [8],

$$|g_k(\xi)|\le\frac{M_1}{k^2}\quad,\quad M_1=const>0.$$

Учитывая это, (16) можно написать в виде

$$|u(x,y)|\le\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(x,\xi)||g_k(\xi)|\,d\xi\le M_1\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}|G_k(x,\xi)|\,d\xi\,. \tag{17}$$

Из (13) вычисляя оценки функции $G_k(x,\xi)$ находим:

$$|G_k(x,\xi)|\le\begin{cases}\dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k}}{\lambda_k^2}+\dfrac{2e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\delta_1}}{\lambda_k^2}, & 0\le x<\xi,\quad 0<\delta_1<\xi-x,\\ \dfrac{4}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k}}{\lambda_k^2}+\dfrac{4}{3}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\delta_2}}{\lambda_k^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-\lambda_k\delta_2}}{\lambda_k^2}, & \xi<x\le 1,\quad 0<\delta_2<x-\xi,\end{cases}$$

или

$$|G_k(x,\xi)|\le\frac{4}{3}\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k}}{\lambda_k^2}+2\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\delta_1}}{\lambda_k^2}+\frac{1}{3}\frac{e^{-\lambda_k\delta_2}}{\lambda_k^2}\le M_2k^{-\frac{4}{3}}. \tag{18}$$

Тогда из (17), получим что

$$|u(x,y)|\le M_3k^{-\frac{10}{3}},$$

отсюда ряд (15) сходится равномерно.

Покажем также, что ряд производных u_{xxx} сходится равномерно.

$$\frac{\partial^3u(x,y)}{\partial x^3}=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^3}{\partial x^3}G_k(x,\xi)g_k(\xi)\,d\xi=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3G_k(x,\xi)\,g_k(\xi)\,d\xi\,, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial^3u(x,y)}{\partial x^3}\right|\le\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}G_k(x,\xi)\right||g_k(\xi)|\,d\xi\le M_4\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left|\lambda_k^3G_k(x,\xi)\right|d\xi\,.$$

(20)

Отсюда получим

$$\left|\lambda_k^3 G_k\left(x,\xi\right)\right| \le \frac{4}{3}\lambda_k e^{-\frac{3}{2}\lambda_k} + 2\lambda_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\delta_1} + \frac{1}{3}\lambda_k e^{-\lambda_k\delta_2} \le M_5 k^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда из (20) имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u\left(x,y\right)}{\partial x^3}\right| \le M_6 k^{-\frac{4}{3}}, \qquad M_i = \overline{1,6}\ ,$$

Отсюда ряд (19) сходится равномерно.

Так как

$$\frac{\partial^2 u\left(x,y\right)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u\left(x,y\right)}{\partial x^3},$$

то аналогичным образом доказывается равномерная сходимость ряда производных $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15), необходимый для удовлетворения уравнения (1). Изменение порядка суммирования и интегрирования всегда законно, в силу того, что ряд под интегралом (15), равномерно сходится по ξ.

В решение (15) заменяя $g_k(\xi)$ их значениями, получим окончательное решение вспомогательной задачи A_2 в следующем виде:

$$u\left(x,y\right) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k\left(x,\xi\right)\cos\pi ky\, g_k\left(\xi\right)d\xi =$$

$$= 2\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k\left(x,\xi\right)\int_0^1 g\left(\xi,\eta\right)\cos\pi k\eta\cos\pi ky d\eta d\xi =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 g\left(\xi,\eta\right)2\sum_{k=1}^{\infty} G_k\left(x,\xi\right)\cos\pi k\eta\, \cos\pi ky\, d\xi d\eta = \int_0^1\int_0^1 G\left(x,\xi,y,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi\, d\eta,$$

где

$$G\left(x,\xi,y,\eta\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k\left(x,\xi\right)\cos\pi k\eta\cdot\cos\pi ky\,. \qquad (21)$$

Легко можно, убедится, что для функции $G\left(x,\xi,y,\eta\right)$ выполняются все условия, задачи (6) и (7). Функция (21) является функцией Грина первой краевой задачи в области D. Сходимость ряда (21) следуют из оценки (18) для функций $G_k\left(x,\xi\right)$, кроме точки $x \ne \xi$.

Учитывая, выполнение для функции $G\left(x,\xi,y,\eta\right)$ краевых условий (6), (7) и для функции $u\left(x,y\right)$ краевых условий (2), (3) из (5) получим решение задачи A_1 в явном виде:

$$2u(x,y)=\int_0^1 G(x,y,1,\eta)\psi_3(\eta)d\eta-\int_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\psi_2(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^1 G(x,y,0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta-\int_0^1 G(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi- \qquad (22)$$
$$+\int_0^1 G(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-\iint_D G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\varphi_i(x)\in C[0,1], i=1,2,\ \psi_j(y)\in C[0,1],\ j=\overline{1,3}$ $g(x,y)\in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, а также выполняются условия согласование, тогда решение задачи A_1 имеет вид (22), где функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ определяется формулой (21).

ЛИТЕРАТУРА:

1.Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа. Прикладная математика и механика. 1952, 2, вып. 6, с.1004-1014.

2.Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972, том 12, № 5, с. 1265-1279.

3. Apakov.Yusupjon P. Construction of the Green's Function for One Problem of Rectangular Region. Malaysian Journal of Mathematical sciences. 2010, 4(1), p. 1-16.

4. Джураев Т.Д., Апаков.Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Вестник Самарского государственного технического университета, Серия «Физико-математические науки», № 2(15), 2007 г.18-26 стр.

5. Апаков Ю. П., & Жураев А. К. (2019). Третья краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с несколькими характеристиками. Украинский математический журнал, 70(9).

6. Юлдашев Т. К., Апаков Ю. П. и Жураев А. К. (2021). Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром. Математический журнал им. Лобачевского, 42, 1317-1327.

7. Апаков, Ю. П., & Жураев, А. Х. (2011). О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина. Узбекский математический журнал, 3.

8. Мусаевна, К. С., и Хатамович, Дж. А. (2021). ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С НЕСКОЛЬКИМИ

ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ. Американский журнал экономики и управления бизнесом, 4(3), 30-39.

9. Апаков, Ю. П., & Жураев, А. Х. (2012). Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 14(1), 22-27.

10. Апаков, Ю. П., & Жураев, А. Х. ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.

11. Yu. P. Apakov, T. K. Yuldashev, A. Kh. Zhuraev On the solvability of a boundary-value problem for a third-order differential equation with multiple characteristics Seriya “Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory”, 2022, 210, 24–34

12. Жураев, А. Х. (2012). КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ. МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, 27.

13. Апаков, Ю. П., & Жураев, А. Х. (2013). Об одной задаче для параболо-гиперболического уравнения с разрывными условиями склеивания в R3. In Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики (pp. 40-43).

14. Апаков, Ю. П., Юлдашев, Т. К., & Жураев, А. Х. (2022). О разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», 210(0), 24-34.

15. Ю.Апаков, & А.Жураев. (2023). К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ. Научный журнал Ферганского государственного университета, (5), 1. https://doi.org/10.56292/SJFSU/vol_iss5/a1

16. Мансуров, М. Т. (2023). АВТОМАТИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ С ПОМОЩЬЮ ARDUINO. Научный Фокус, 1(1), 1992-1997.

17. Nozimjon, Q., & Rasuljon, Y. (2021). The issue of automation, analysis and anxiety of online testing. Asian Journal Of Multidimensional Research, 10(7), 94-98.

18. Нишонов, Ф. А., Хожиев, Б. Р., & Қидиров, А. Р. (2018). Дон махсулотларини сақлаш ва қайта ишлаш технологияси. Научное знание современности, (5), 67-70.

19. Хожиев, Б. Р., Нишонов, Ф. А., & Қидиров, А. Р. (2018). Углеродли легирланган пўлатлар қуйиш технологияси. Научное знание современности, (4), 101-102.

20. Мелибаев, М., Нишонов, Ф., & Кидиров, А. (2017). Требования к эксплуатационным качествам шин. SCIENCE TIME. Общество Науки и творчества. Международный научный журнал. Казань Выпуск, 1, 287-291.

21. Мелибаев, М., Нишонов, Ф., & Кидиров, А. (2017). Тягово-сцепные показатели машинно-тракторного агрегата. SCIENCE TIME. Общество Науки и творчества.//Международный научный журнал.–Казань. Выпуск, 1, 292-296.

22. Мелибаев, М., Нишонов, Ф., & Норбоева, Д. (2017). Плавность хода трактора. Наманган муҳандислик технология институти. НМТИ. Наманган.

23. Мелибаев, М., & Нишонов, Ф. А. (2017). Определение площади контакта шины с почвой в зависимости от сцепной нагрузки и размера шин и внутреннего давления. Научное знание современности, (3), 227-234.

24. Нишонов, Ф. А., Мелибоев, М. Х., & Кидиров, А. Р. (2017). Требования к эксплуатационным качествам шин. Science Time, (1 (37)), 287-291.

25. Мелибаев, М., Нишонов, Ф. А., & Кидиров, А. Р. (2017). Грузоподъёмность пневматических шин. Научное знание современности, (4), 219-223.

26. Нишонов, Ф. А., Мелибоев, М. Х., & Кидиров, А. Р. (2017). Тягово-сцепные показатели машинно-тракторных агрегатов. Science Time, (1 (37)), 292-296.

27. Тохиржонович, И. Р. М. М. Хожиев Бахромхон Рахматуллаевич, Нишонов Фарходхон Ахматханович, & Кидиров Адхам Рустамович (2022). МАШИНА ДЛЯ УБОРКИ АРАХИСА. Вестник Науки и Творчества,(3 (75)), 11-14.