MODUL BELGISI QATNASHGAN BA’ZI BIR TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

Axlimirzayev A
Sobirov G.S
Ibroximjonov I.I

Annotatsiya: *Ushbu maqolada umumiy o’rta ta’lim maktablari va akademik litseylar matematika kursida uchraydigan modulli tenglamalar turlarga bo’lingan va ularni yechish usullari yetarlicha misollar yordamida bayon qilingan.*

Kalit so’zlar: *Haqiqiy sonning moduli, modulli tenglama, oraliqlar usuli, tenglamaning yechimi, parametr, teng kuchlilik, sistemalar birlashmasi.*

Ma’lumki, tenglamalar maktab matematika kursining mazmundor uslubiy yo’nalishlaridan biri hisoblanadi va bugungi kunda umumiy o’rta ta’lim maktablarining birinchi sinfidanoq o’rganilmoqda. Tenglama ko’plab amaliy masalalarning matematik modelidan iborat. Shuning uchun umumiy o’rta ta’lim maktablari va akademik litseylarda tenglamalarni o’rganishga katta ahamiyat beriladi.

Boshlang’ich sinflarda tenglamalarni o’rganish arifmetik amallardagi komponentalardan biri noma’lum bo’lganda uni topish qoidasi asosida amalga oshiriladi. Yuqori sinflarda tenglamalar turlarga bo’linadi va har bir turga kiruvchi tenglama uchun yechish usullari keltiriladi. Tenglama tushunchasiga turlicha ta’riflar mavjud. Quyida ulardan ba’zilarini keltiramiz:

Ta’rif: Noma’lum son qatnashgan tenglik tenglama deb ataladi [1.233].

Ta’rif: Har qanday $f(x)$ va $g(x)$ funksiya uchun tuzilgan

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

ko’rinishidagi ifodaga bir o’zgaruvchili (noma’lumli) tenglama deb ataladi [2.279].

Funksiya tushunchasi o’rganilgunga qadar bu ta’riflarning birinchisidan, funksiya tushunchasi o’rganilgandan so’ng ikkinchi ta’rifdan foydalanish mumkin.

Tenglama kabi tenglamaning yechimi (ildizi) ga ham turlicha ta’riflar mavjud.

Ta’rif: Noma’lum sonning topilgan qiymati berilgan tenglamaning yechimi yoki ildizi deyiladi [1.233].

Ta’rif: $x=x_0$ haqiqiy son uchun (1) tenglamaning chap va o’ng tomonlari aniqlangan bo’lib, $f(x_0)$ va $g(x_0)$ qiymatlar o’zaro teng bo’lsa, u holda x_0 shu tenglamaning yechimi (ildizi) deyiladi [2.279].

Agar ikkita tenglama ildizlari to’plami aynan bir xil to’plamdan iborat bo’lsa, u holda ular o’zaro teng kuchli tenglamalar deyiladi.

Masalan, $10x^2+3=13$ va $9x^2=9$ tenglamalar teng kuchlidir, chunki ularning har biri bir xil ildizlr to’plami {-1; 1} ga ega.

Agar ikki tenglamadan birinchisining har qanday ildizi ikkinchisining ham ildizi bo'lsa, u holda ikkinchi tenglama birinchisining natijasi deyiladi.

Ma'lumki, bugungi kunda umumiy o'rta ta'lim maktablari va akademik litseylarda quyidagi: chiziqli, kvadrat, kasr-chiziqli, bikvadrat, irratsional, ko'rsatkichli, logarifmik va trigonometrik tenglamalar o'rganiladi. Lekin bu tenglamalarda ba'zan parametrlar yoki modul belgisi qatnashib qolishi mumkin. Bunday hollarda tenglamani parametrli yoki modulli tenglama deb ham ataladi. Bunday tenglamalarni yechish o'quvchidan ijodkorlikni talab qiladi. Shuning uchun ham biz, ushbu maqolada modul belgisi qatnashgan ba'zi bir tenglamalarni yechish bilan shug'ullanamiz. Bunday tenglamalarni yechishda asosan modulning ta'rifidan va xossalaridan foydalaniladi. Ularni quyida keltiramiz:

Ta'rif: a haqiqiy sonning moduli deb $a \geq 0$ bo'lganda shu sonning o'ziga, $a<0$ bo'lganda esa o'zining qarama-qarshi ishoraligiga teng bo'lgan songa aytiladi.

a haqiqiy sonning moduli quyidagicha yoziladi:

$$|a| = \begin{cases} a, & agar \;\; a \geq 0 \;\; bo'lsa, \\ -a, & agar \;\; a<0 \;\; bo'lsa \end{cases}$$

U quyidagi xossalarga ega:

$$|a| \geq 0; \qquad |a| = |-a|; \qquad |a|^2 = a; \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0; \quad |ab| = |a| \cdot |b|.$$

Agar a>b bo'lsa, u holda $|a-b| = a-b;$ agar $a<b$ bo'lsa, u holda $|a-b| = b-a$.

Misollar: 1) $2\sqrt{2} + \left|2\sqrt{2}-5\right| = 2\sqrt{2}+5-2\sqrt{2} = 5$, chunki $2\sqrt{2}-5<0$;

2) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = \left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-1$, $1-\sqrt{3}<0$;

3) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4} = \left|\sqrt{5}-2\right|$, $\sqrt{5}-2>0.$

Bunday misollar yordamida o'quvchilarning modulning ta'rif va xossalari haqidagi bilimlari mustahkamlangandan so'ng modul qatnashgan tenglamalarni yechishga o'tish mumkin.

Modul qatnashgan tenglamalarni shartli ravishda quyidagi turlarga bo'lishi mumkin:

I. $|f(x)| = a,\ a \geq 0.$ II. $f|x| = a.$ III. $|f(x)| = \varphi(x).$

IV. $|f(x)| = |\varphi(x)|.$ V. $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = a$

Quyida bularga doir misollar ko'rib chiqamiz:

1-misol: $|2x-9| = 7$ tenglama yechilsin. Bu tenglama $|f(x)| = a$ ko'rinishidagi tenglamadir.

Yechish: Modul ta'rifiga asosan bu tenglama quyidagi ikkita tenglamalar birlashmasiga teng kuchli:

$$\left[\begin{array}{l}2x-9=7\\2x-9=-7\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}2x=16\\2x=2\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=8\\x=1\end{array}\right.$$

Javob: 1 va 8

2-misol: $|\sin x+\cos x|=1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Ta'rifga asosan

$$\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=1\\\sin x+\cos x=-1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z\\x_2=\frac{\pi}{4}\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in Z\end{array}\right.;\quad x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

3-misol: $x^2-5|x|+6=0$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama $f\,|x|=a$ ko'rinishidagi tenglamadir. Bu tenglama

$$\begin{cases}f(x)=a\\x\geq 0\end{cases}\quad \text{va}\quad \begin{cases}f(-x)=a\\x\leq 0\end{cases}$$

sistemalar birlashmasiga teng kuchlidir. Unga asosan berilgan tenglama

$$\begin{cases}x^2-5x+6=0\\x\geq 0\end{cases}\quad \text{va}\quad \begin{cases}x^2+5x+6=0\\x\leq 0\end{cases}$$

sistemalar birlashmasiga teng kuchli. Ularni yechamiz:

$$\begin{cases}x^2-5x+6=0\\x\geq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x_1=2,\ x_2=3\\x\geq 0\end{cases};\quad x_1=2,\ x_2=3;$$

$$\begin{cases}x^2+5x+6=0\\x\leq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x_1=-2,\ x_2=-3\\x\leq 0\end{cases};\quad x_3=-2,\ x_4=-3$$

Javob: $\pm 2,\pm 3$.

4-misol: $|6x-2|=11-2x$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama $|f(x)|=\varphi(x)$ ko'rinishidagi tenglamadir. Bu

$$\begin{cases}f(x)=\varphi(x)\\\varphi(x)\geq 0\end{cases}\quad \text{va}\quad \begin{cases}f(x)=-\varphi(x)\\\varphi(x)\geq 0\end{cases}$$

sistemalar birlashmasiga teng kuchli. Bunga asosan berilgan tenglama

$$\begin{cases}6x-2=11-2x\\11-2x\geq 0\end{cases}\quad \text{va}\quad \begin{cases}6x-2=2x-11\\11-2x\geq 0\end{cases}$$

sistemalar birlashmasiga teng kuchli. Ularni yechamiz:

$$\begin{cases} 6x-2=11-2x \\ 11-2x\geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 8x=13 \\ 2x\leq 11 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\dfrac{13}{8} \\ x\leq\dfrac{11}{2} \end{cases}; \quad x=\frac{13}{8};$$

$$\begin{cases} 6x-2=2x-11 \\ 11-2x\leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x=-9 \\ 2x\leq 11 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \\ x\leq\dfrac{11}{2} \end{cases}; \quad x=-\frac{9}{4}.$$

Javob: $-\frac{9}{4}$ va $\frac{13}{8}$.

5-misol: $|2-6x|=|5-4x|$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama $|f(x)|=|\varphi(x)|$ ko'rinishidagi tenglamadir. Bu tenglama $|f(x)|^2=|\varphi(x)|^2$ yoki $f^2(x)=\varphi^2(x)$ tenglamaga teng kuchli. Bunga asosan $|2-6x|^2=|5-4x|^2$, $(2-6x)^2=(5-4x)^2$, $4-24x+36x^2=25-40x+16x^2$, $20x^2+16x-21=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+420}}{20}=\frac{-8\pm 22}{20};\ x_1=\frac{14}{20}=\frac{7}{10},\ x_2=-\frac{30}{20}=-\frac{3}{2}.$$

Javob: $\frac{7}{10}$ va $-\frac{3}{2}$.

6-misol: $|x|+|7-x|+2|x-2|=4$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\cdots+|f_n(x)|=a$ ko'rinishidagi tenglamadir. Bu tenglamani oraliqlar usuli bilan yechish qulay. Buning uchun $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\dots,\ f_n(x)=0$ tenglamalarni yechib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(x_1<x_2<\cdots<x_n)$ nuqtalarni topamiz, so'ngra bu nuqtalar bilan sonlar o'qini $(-\infty;x_1),(x_1;x_2),\dots,(x_{n-1};x_n)$ oraliqlarga bo'lamiz va har bir oraliqda hosil bo'lgan tenglamalarni yechamiz. Demak, $x=0,\ 7-x=0$ va $x-2=0$ bo'lib, bulardan $x_1=0, x_2=2$ va $x_3=7$ larni topamiz. Bu nuqtalar kritik nuqtalar deb ham ataladi. Demak, sonlar o'qi $(-\infty;0),[0;2)$,$[2;7)$ va $[7;+\infty)$ oraliqlarga bo'linadi.

$-\infty<x\leq 0$ da $|x|=-x, |7-x|=7-x, |x-2|=-x+2$ bo'lgani uchun berilgan tenglamadan $-x+7-x-2x+4=4,\ -4x=-7,\ x=\frac{7}{4}.\ \frac{7}{4}>0$ bo'lgani uchun $(-\infty;0)$ da tenglama yechimga ega emas.

$[0;2)$ da $|x|=x, |7-x|=7-x, |x-2|=-x+2$ bo'lgani uchun berilgan tenglamadan $x+7-x-2x+4=4,\ -2x=-7,\ x=3,5.$ Bu $[0;2)$ ga tegishli emas. Demak, bu oraliqda ham tenglama yechimga ega emas.

$[2;7)$ da $|x|=x, |7-x|=7-x, |x-2|=x-2$ bo'lgani uchun berilgan tenglamadan $x+7-x+2x-4=4,\ 2x=1,\ x=0,5.$ Bu $[2;7)$ ga tegishli emas. Demak, bu oraliqda ham tenglama yechimga ega emas.

$[7;+\infty)$ da $|x| = x,\ |7-x| = x-7,\ |x-2| = -x+2$ bo'lgani uchun berilgan tenglamadan $x+x-7+2x-4=4,\ 4x=15,\ x=\frac{15}{4}$. Bu ham $[7;+\infty)$ oraliqqa tegishli emas. Demak, bu oraliqda ham tenglama yechimga ega emas.

Demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

Ba'zi bir tenglamalarda modul ichida yana modul qatnashib qolishi mumkin. Bunday hollarda dastlab modul ichidagi moduldan qutiladi, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan yana modul belgisi ochiladi.

7-misol: $\big|x-|4-x|\big|-2x=4$ tenglama yechilsin.

Yechish: Berilgan tenglama quyidagi 2 ta sistemalar birlashmasidan iborat.

$$\begin{cases} 4-x \ge 0 \\ |x-(4-x)|-2x=4 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} 4-x<0 \\ |x+(4-x)|-2x=4 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x \le 4 \\ |2x-4|-2x=4 \end{cases}$$

$$\text{va} \quad \begin{cases} x>4 \\ 4-2x=4 \end{cases}$$

Bu sistemalardan ikkinchisi yechimga ega emas.

Birinchi sistema o'z vaqtida quyidagi sistemalar birlashmasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} x \le 4 \\ 2x-4 \ge 0 \\ (2x-4)-2x=4 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x \le 4 \\ 2x-4<0 \\ -(2x-4)-2x=4 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x \le 4 \\ x \ge 2 \\ -4=4 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x \le 4 \\ x<2 \\ -4x=0 \end{cases}$$

Bulardan birinchisi yechimga ega emas. Ikkinchi sistemadan $x=0$ kelib chiqadi.

Javob: $x=0$

Ba'zi modulli tenglamalarda parameter ham qatnashib qolishi mumkin.

8-misol: $|x|+|x-1|+|x-2|=a$ tenglama yechilsin.

Yechish: Kritik nuqtalar $x_1=0, x_2=1,\ x_3=2$ lardan iborat.

Demak, biz berilgan tenglamani $(-\infty;0),(0;1),(1;2)$ va $(2;+\infty)$ oraliqda tekshiramiz.

$x \in (-\infty;0)$ da $|x|=-x,\ |x-1|=1-x,\ |x-2|=2-x$ bo'lganligi uchun bu oraliqda berilgan tenglamadan quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$-x+1-x+2-x=a,\ -3x=a-3,\ x=\frac{3-a}{3}$. $x<0$ shartni e'tiborga olsak, $\frac{3-a}{3}<0,\ 3-a<0,\ a>3$.

Agar $x \in [0;1)$ bo'lsa, $|x|=x,\ |x-1|=1-x,\ |x-2|=2-x$ bo'lib, bu oraliqda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$x+1-x+2-x=a,\ -x+3=a,\ x=3-a.$ Agar $x \in [0;1)$ shartni e'tiborga olsak, $0 \le 3-a<1,\ -3 \le -a<-2,\ 2<a \le 3.$

Agar $x \in [1;2)$ bo'lsa, $|x|=x,\ |x-1|=x-1,\ |x-2|=2-x$ bo'lib, bu holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$x+x-1+2-x=a,\ x+1=a,\ x=a-1$. Agar $x\in[1;2)$ shartni e'tiborga olsak, $1\le a-1<2,\ 2\le a<3$.

Agar $x\in[2;\infty)$ bo'lsa, u holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$x+x-1+x-2=a,\ 3x-3=a,\ 3x=a+3,\ x=\dfrac{a+3}{3}$. Agar $x\in[2;\infty)$ ni e'tiborga olsak, $\dfrac{a+3}{3}\ge 2,\ a+3\ge 6,\ a\ge 3$.

Javob: $a>3$ bo'lsa, $x=\dfrac{3-a}{3}$; agar $2<a\le 3$ bo'lsa, $x_1=3-a$ va $x_2=3-a$; agar $a\ge 3$ bo'lsa, $x=\dfrac{3+a}{3}$.

Shunday qilib, biz ushbu maqolada modul qatnashgan 8 ta tenglama bilan tanishdik. Umumiy o'rta ta'lim maktabi va akademik litseylar matematika kursida o'rganiladigan mavzular ichida modul qatnashgan tenglamalarga tez-tez duch kelishadi. Shuning uchun ham o'quvchilarda bunday tenglamalarni yechish malakalarini shakllantirishimiz kerak. Bu esa o'quvchilarning tenglamalar mavzusini puxta egallashlarida muhim omil bo'lib xizmat qiladi va pirovard natijada ta'lim samarali bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Alixonov S. Matematika o'qitish metodikasi. T.: "TAFAKKUR BO'STONI", 2011.-385b.
2. Umirbekov A.U., Shaabzalov Sh.Sh. Matematikani takrorlang. T.: O'qituvchi, 1989.-440b
3. И.И.Гайдунов. Абсолютная величина. М.: Просвещение, 1968.-96 с.
4. И.Х.Сивашинский. Пособие по математике для техникумов. М.: Высшая школа, 1970.-448 с.