GIPERGEOMETRIK FUNKSIYALARNING BA'ZI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHGA TADBIQI

Maftunaxon Turdaliyeva Saydolim qizi
FarDU magistranti.

Bizga ma'lumki, bir o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarni o'rganish 200 yildan ortiq tarixga ega. Ular Eyler, Gauss, Riemann va Kummer ishlarida uchraydi. Ularning integral ko'rinishlari Barns va Mellin, maxsus xususiyatlarini esa Shvarts va Gursalar o'rganishgan. Gipergeometrik tenglamasi matematik fizikada ko'plab xususiy hosilali differensial tenglamalar o'zgaruvchilarni ajratish orqali mashhur Gauss tenglamasiga keltiriladi.

Gipergeometrik funksiyalarni uch xil usulda xarakterlash mumkin: koeffitsiyentlari ma'lum rekurrent munosabatlarni qanoatlantiradigan qatorlar bilan ifodalangan funksiyalar sifatida; differensial tenglamalar sistemasi mos ma'noda golonomik va sust maxsuslikga ega bo'lgan yechimlari sifatida; Mellin-Barns integrali kabi integrallar bilan aniqlangan funksiyalar sifatida. Bir o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar uchun bu o'zaro ta'sir bir necha o'n yillar davomida yaxshi o'rganilgan. Bir nechta o'zgaruvchilar holatida, ushbu yondashuvlarning har birini kengaytirish mumkin, ammo biroz boshqacha natijalarga erishish mumkin.

Shunday qilib, ko'p o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyaning umumlashgan ta'rifi mavjud emas. Masalan, qator koeffitsientlari bo'yicha ko'p o'zgaruvchili gipergeometrik qatorlar Gorn tushunchasi mavjud. Ular qanoatlantiradigan maxsus xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini keltirib chiqaradi. Ma'lum bo'lishicha, ikkitadan ortiq o'zgaruvchilar uchun bu sistema golonomik bo'lishi shart emas, ya'ni mahalliy yechimlar maydoni cheksiz o'lchovli bo'lishi mumkin. Boshqa tomondan, ushbu xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemani golonomik sistemaga kengaytirishning tabiiy usuli mavjud. Ushbu ikki tizim o'rtasidagi munosabat faqat ikkita o'zgaruvchili holatda yaxshi o'rganilgan. Hatto klassik Horn, Appell, Poxgammer va Lauricella, ko'p o'zgaruvchan gipergeometrik funksiyalarda ham faqat 1970 va 80-yillarda V.Miller va uning shogirdlari tomonidan differensial tenglamalarning Li algebrasini o'rganishga urinish bo'lgan.

So'nggi o'ttiz yil ichida gipergeometrik funksiyalarni o'rganishga bo'lgan qiziqish ortib bormoqda. Darhaqiqat, ma'lumotlar bazasida gipergeometrik sarlavhali so'zni qidirish natijasida 3181 ta maqola topiladi, ulardan 1530 tasi 1990 yildan beri nashr etilgan ushbu yangi qiziqish gipergeometrik funksiyalar va matematikaning ko'plab sohalari o'rtasidagi bog'liqlikdan kelib chiqadi, masalan, algebraik geometriya, kombinatorika, raqamlar nazariyasi, simmetrik aks ettirishlar va boshqalar.

Ma'lumki, Gamma funksiyasi $\Gamma(s)$ quyidagi integral bilan aniqlanadi:

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt. \qquad (1)$$

(1) integral Re(s) > 0 yarim tekislikda golomorf funksiyani ifodalaydi va bundan tashqari u quyidagi funksional tenglamani qanoatlantiradi.

$$\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)\,; \qquad \mathrm{Re}(s)>0. \qquad (2)$$

Demak, $\Gamma(1)=1$ bo'lgani uchun $\Gamma(n+1)=n!$, ($n\in N$) ekanligi kelib chiqadi.

Γ ni musbat bo'lmagan butun sonlarda oddiy qutblar bilan butun kompleks tekislikdagi meromorf funksiyaga kengaytirish uchun (2) dan foydalanishimiz mumkin. Masalan, $\{-1<\mathrm{Re}(s)\le 0\}$ palasada $\Gamma(s)$ ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Gamma(s):=\frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Ta'rif. $\alpha\in C\backslash Z_{\le 0}$ va $k\in N$ ni hisobga olgan holda biz Poxgammer belgisini aniqlaymiz:

$$(\alpha)_k=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (3)$$

Aytaylik $n=(n_1,\dots,n_r)\in N^r$ manfiy bo'lmagan butun sonlarning r-tartiblisi bo'lsin. Xuddi shu kabi $x=(x_1,\dots,x_r)\in C^r$ berilgan bo'lsa, biz buni x^n bilan belgilaymiz. U holda

$$x^n:=x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r},$$

va Q^r dagi j- tartibli standart bazis vektorini e_j bilan belgilaymiz.

Ta'rif . Barcha $j=1,\dots,r$ lar uchun,

$$R_j(n)=\frac{A_{n+e_j}}{A_n}$$

nisbat $n=(n_1,\dots,n_r)$ ning ratsional funksiyasi bo'lsa, ushbu ko'p o'zgaruvchili darajali qator

$$F(x_1,\dots,x_r)=\sum_{n\in N^r}A_nx^n$$

Gorn gipergeometrik funksiyasi deyiladi.

Quyidagi qatorlar odatda Gauss gipergeometrik qatori deb ataladi

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n;\quad \gamma\in Z_{\le 0}. \qquad (4)$$

Gipergeometrik qator koeffitsiyentlarining rekurrent xossalari ularning oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalarning yechimini ifodalashga imkon beradi. Gaussning gipergeometrik funksiyasi qanoatlantiradigan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani keltirib chiqarishni koradigan bo'lsak, bunda biz quyidagi o'zgartirishlardan foydalanamiz: bir x o'zgaruvchining funksiyasi uchun biz d/dx

differentsiallash operatorini ∂_x orqali, bir necha $x_1,\dots,x_n$ o'zgaruvchilarning funksiyalari uchun biz $\partial/\partial x_j$ xususiy hosila operatori uchun ∂_j dan foydalanamiz. Yoki soddalik uchun quyidagi Eyler operatorlaridan foydalanishimiz mumkin:

$$\theta_x = x\partial_x; \quad \theta_j = x_j\partial_j.$$

Endi Gaussning gipergeometrik (4) qatorini ko'rib chiqaylik. Ma'lumki,

$$\theta_x F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} n x^n.$$

Lekin, $n(\alpha)_n = \alpha((\alpha+1)_n - (\alpha)_n)$ ga muvofiq

$$\theta_x F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha+1)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} - \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}\right)x^n = \alpha\left(F(\alpha+1,\beta,\gamma;x) - F(\alpha,\beta,\gamma;x)\right).$$

Demak,

$$(\theta_x+\alpha)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;x).$$

$$(\theta_x+\beta)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma;x),$$

Xuddi shu kabi, quyidagi tenglikka ham ega bo'lamiz:

$$(\theta_x+(\gamma-1))\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;x) = (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1;x).$$

$$\partial_x F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x).$$

Yuqoridagi to'rtta tenglamani birlashtirib, Gaussning gipergeometrik qatori quyidagi oddiy differensial tenglamani qanoatlantirishini topishimiz mumkin bo'ladi:

$$(\theta_x+\alpha)(\theta_x+\beta)F = (\theta_x+\gamma)\partial_x F. \tag{5}$$

(5) tenglama ushbu tenglamaga ekvivalent ekanligini ko'rishimiz mumkin:

$$x(x-1)\partial_x^2 F + ((\alpha+\beta+1)x-\gamma)\partial_x F + \alpha\beta F = 0.$$

Masalan, ushbu Laplas tenglamasini ko'rib chiqamiz:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial u_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial u_4^2}\right)\Phi = 0.$$

O'zgaruvchilarni quyidagicha o'zgartirish

$$u_1 = x_1 + x_2; \quad u_2 = ix_1 - ix_2; \quad u_3 = x_3 - x_4; \quad u_4 = ix_3 - ix_4,$$

Laplas tenglamasini quyidagi shaklga aylantiradi:

$$(\partial_1\partial_2 - \partial_3\partial_4)\Phi = 0.$$

Bu erda, avvalgidek, $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

Teorema. Har qanday α,β,γ uchun

$$\Phi_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,\dots,x_4) = x_2^{-\alpha}x_2^{-\beta}x_3^{\gamma-1}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{x_3x_4}{x_2x_1}\right)$$

funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantiradi. Bu yerda $\gamma\notin Z_{\le 0}$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A. Dickenstein, L. F. Matusevich, and T. Sadykov. Bivariate hypergeometric D-modules. Adv. Math., 196(1): 78–123, 2005.

2. M. Saito, B. Sturmfels, and N. Takayama. Gr¨obner deformations of hypergeometric differential equations, volume 6 of Algorithms and Computation in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

3. E. Cattani, A. Dickenstein, and B. Sturmfels. Rational hypergeometric functions. Compositio Math., 128(2):217–239, 2001.

4. E. L. Ince. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, New York, 1944.