LAPLAS TENGLAMASINING FUNDAMENTAL YECHIMI.

Tog`ayev Turdimurod Xurram o`g`li
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti turdimurodtagayev@gmail.com
Rustamov Bilol Muxbiddinovich
Abdurashidov Nuriddin G'iyoziddin o'g'li

Annotatsiya: *Biz ushbu maqolada Laplas tenglamasining fundamental yechimi haqida qisqacha ma'lumotlarni keltirib o'tdik.*

Kali so'zi: *Laplas tenglamasi,fundamental yechim,eleptik tipli tenglamalar,Grin formulalari,garmonik funksiyalar,qatorlar.*

Abstract: *We present in this paper the fundamental solution of Laplace's equation. we have given brief information about.*

Kali word: *Laplace's equation, fundamental solution, elliptic type equations, Green's formulas, harmonic functions, series*

Аннотация: *В этой статье мы представляем фундаментальное решение уравнения Лапласа.мы дали краткую информацию об этом.*

Слово Кали: *уравнение Лапласа, фундаментальное решение, уравнения эллиптического типа, формулы Грина, гармонические функции, ряды*

Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.1)$$

va Puasson $\Delta u = f(x)$ (1.2) tenglamalaridir.

E^n fazoda biror yopiq S sirt bilan chegaralangan chekli yoki D sohani qaraylik.

Agar $u(x) = u(x_1, ..., x_n)$ funksiya chekli yoki D sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x)$ ni D sohada garmonk funksiya deb hisoblaymiz.

Agar $u(x)$ funksiya fazo chekli nuqtasining yetarli kichik atrofida, ya'ni markazi shu nuqtada bo'lgan yetarli kichik bo'lgan radiusli sharda garmonik bo'lsa, uni shu nuqtada garmonik deb atashimiz mumkin.

Agar $u(x)$ funksiya cheksiz D sohaning koordinata boshidan chekli masofada yotgan ixtiyoriy x nuqtasida garmonik bo'lib, yetarli katta $|x|$ lar uchun $\left(|x| = \sqrt{x_1^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}\right)$

$$|u(x)| \le \frac{c}{|x|^{n-2}}, \qquad c - const$$

tengsizlik bajarilsa, $u(x)$ funksiya cheksiz D sohada garmonik bo'ladi.

E^n fazodagi ikki $x=(x_1,...,x_n)$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ nuqta orasidagi masofani r orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$r=|x-\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}$$

Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu

$$E(x,\xi)=\begin{cases} r^{2-n}, n>2 \\ \ln\frac{1}{r}, n=2 \end{cases} \quad (1.3)$$

funksiya $x\neq\xi$ bo'lganda x bo'yicha ham, ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham [38]

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{\partial r}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{x_i-\xi_i}{r}=(2-n)r^{-n}(x_i-\xi_i),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^{\,2}}=(2-n)r^{-n}-(2-n)nr^{-n-2}(x_i-\xi_i)^2,$$

Oxirgi ifodani (1.1) tenglamaning chap tomoniga olib borib qo'yamiz. U holda ushbu ifodaga ega bo'lamiz

$$\Delta E=n(2-n)r^{-n}-n(2-n)nr^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2=0.$$

Xuddi shunga o'xshash $n=2$ hol tekshirib ko'riladi. $E(x,\xi)$ funksiya x va ξ ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun bu funksiya $x\neq\xi$ da ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi deb aytishimiz mumkin.

(1.3) formula bilan aniqlangan $E(x,\xi)$ funksiyani Laplas tenglamasining elementar yoki fundamental yechimi deyiladi.

Cheksizlikda quyidagi

$$E(x,\xi)=O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$$

baho o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham, $E(x,\xi)$ funksiyaning yetarli katta $|x|$ lardagi qiymati qiziqtirayotgani uchun $|x|>2|\xi|$ deb olishimiz mumkin.

U holda

$$r=|x-\xi|\geq|x|-|\xi|$$

tengsizlikka asosan, $|\xi|<\frac{|x|}{2}$ bo'lgani uchun $r<\frac{|x|}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan darhol

$$E(x,\xi) < \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Takitlab o'tamizki, qiymatlari ikki nuqta o'rtasidagi masofa r ga bog'liq bo'lgan Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(r)$ funksiyalar orasida $C_1E(x,\xi)+C_2$ ko'rinishdagi funksiyalardan boshqa funksiya mavjud emas, bunda C_1, C_2 - o'zgarmas sonlar.

Faraz qilaylik, shunday funksiya mavjud bo'lsin, ya'ni, $u(x)=\lambda(r)$ bu funksiyadan x_i o'zgaruvchi bo'yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i-\xi_i}{r}\frac{\partial \lambda}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}} = \frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}\left[1-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\right]$$

Bu hosilalarni tenglamaga qo'ysak, Laplas tenglamasi o'rniga

$$\lambda'' + \frac{n-1}{r}\lambda' = 0$$

oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$C_1E(x,\xi)+C_2$$

dan iborat.

Endi esa quyidagi Grin formulalari bilan tanishib chiqamiz

D bo'laklari silliq, S sirt bilan chegaralangan fazodagi soha bo'lib, $u(x)$ va funksiyalar $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ sinfga tegishli bo'lsin.[39],[40],[41]

soha bo'yicha quyidagi

$$\upsilon\Delta u = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right],$$

$$\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)$$

ayniyatlarni integrallab va Gauss-Ostragradskiy formulasini qo'llab,

$$\int_D \upsilon\Delta u dx = -\int_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}dx + \int_S \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}dS\,, \qquad (1.4)$$

$$\int_D (\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon)dx = \int_S \left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right)dS \quad (1.5)$$

formulalarni hosil qilamiz, bunda ga o'tkazilgan tashqi normal (1.4) ni Grinning birinchi, (1.5) ni esa ikkinchi formulasi deb yuritiladi. Agar $u(x)$ va $\upsilon(x)$ funksiyalar D da garmonik bo'lsa, u holda (1.4) va (1.5) formulalar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

(1.6)

$$\int_S \left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right)dS = 0 \quad (1.7)$$

(1.6) va (1.7) formulalarga asosan garmonik funksiyalarning qator sodda xossalari kelib chiqadi.

1) Agar D sohada garmonik bo'lgan $u(x)$ funksiya $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lib, D sohaning chegarasi S da nolga teng

bo'lsa, u holda barcha $x \in D \cup S$ lar uchun bo'ladi (garmonik funksiyaning yagonalik xossasi).

Agar (1.6) tenglikda $u(x) = \upsilon(x)$ desak, undan bu xossa darrov kelib chiqadi. Haqiqatan, $y \in S$ da $u(y) = 0$ bo'lgani uchun (1.6) dan

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int_S u(y)\frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (1.8)$$

yoki

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1,\dots,n, x \in D$ ya'ni barcha $x \in D$ lar uchun $u(x) = const$. Bundan $y \in S$, $u(y) = 0$ bo'lgani sababli, yopiq $D \cup S$ sohada $u(x)$ ning uzliksizligidan barcha $x \in D \cup S$ lar uchun $u(x) = 0$.

2) Agar D sohada garmonik, $D\bigcup S$ da birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal hosilasi D ning chegarasi S da nol ga teng bo'lsa, barcha $x\in D$ nuqtalar uchun $u=const$ bo'ladi.

Bu xossa barcha $y\in S$ lar uchun $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ bo'lgani sababli, (1.8) tenglikdan darhol kelib chiqadi.

3) D sohada garmonik, $D\bigcup S$ dao'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal hosilasidan S bo'yicha olingan integral nolgateng.

Haqiqatan, (1.6) formulada $\upsilon(x)=1$, $x\in D$ desak,

$\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ hosil bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Салоҳиддинов М. Математик физика тенгламалари. Тошкент- «Ўзбекистон» нашриёти-2002й.-448 б.

2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров. Нелокальние задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. 2005. "Universitet". "Yangi yo'l poliyraf servis"-224 с.

3. Салахитдинов М.С.,Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент. Фан, 1997, –165

4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Об одном аналоге задачи Бицадзе Самарского для вырождающегося эллиптического уравнения. / / Сибирский математический журнал 1999, т. 40 No 1. с. 177-182

5.B.M.Rustamov. J.U.To`raxonov. Kasodlik ehtimolligining aniq hisobiga doir misol. Образование наука и инновационные идеи в мире 35(2) 172-175

6.B.M.Rustamov. Sug`urta kompaniyasi kasodligining dinamik modellari Значение цифровизации и искусственого интелекта в устойчивом развитии. Международная совместная научно-практическая конференция 15.03.2024-у 273-bet

7.Abdurashidov N.G'.,Simmetrik Li va Leybnits algebralari va ularning xossalari. "O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR" APREL 2022. (7), 62-63.

8.Eshtemirov Eshtemir Salim o'g'li, Abdurashidov Nuriddin G'iyoziddin o'g'li. VEYL-TITCHMARSH FUNKSIYASI VA SPEKTRAL FUNKSIYA ORASIDAGI

MUNOSABAT. "O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR" 20-iyun 2023-yil 20-son (870-875).

9.Abdurashidov N. G'., Eshtemirov E. S .SIMMETRIK LEYBNITS ALGEBRALARI VA ULARNING XOSSALARI. << Matematik modellashtirish va axborot texnologiyalarining dolzarb masalalari >> xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. Nukus 2-3-may 2023-yil 1-Tom.

10. Abdurashidov Nuriddin , Toshtemirova Sarvara,Yo'ldoshev Husan.

Laplas teoremasi yordamida 4-tartibli determinantni hisoblash. "O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR" 20-fevral 2024-yil 27-son (163-166).

11. Abdurashidov Nuriddin, O'ktamova Nigora, Ahmadova Sevinch. "Geometriya masalalarini yechishda vektorlarning ba'zi bir tadbiqlari". Pedagog respublika ilmiy jurnali. 15-mart 2024-yil 7-tom 3-son (61-66).

12. Rustamov Bilol, O'ktamova Nigoraxon, Ahmadova Sevinch. ikkinchi tartibli sirtlarning urunma tenglamasi."So`ngi ilmiy tadqiqotlar nazaryasi"

13. Mirsoburova D.M, Togayev T.X, Toshtemirov U.E. Об одной композици несобственных интегралов со слабыми особенностями. 2022-йил Термиз.

14. Тогаев Т.Х . О потенциале двойного слоя для уравнения Геллерстедта с сингулярным коеффициентом. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ДУШАНБЕ 2022.