О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ДЕЙСТВЫТЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А.Абдукодиров
О.Вохобжонова

Аннотация: *В данной работе приведено общее решение дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными с некратными действительными характеристиками, и решение ЗАДАЧИ КОШИ найдено в явном виде.*

Ушбу мақолада каррали бўлмаган ҳақиқий характеристикаларга эга бўлган икки ўзгарувчили бешинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг умумий ечими келтирилган ҳамда Коши масаласининг ечими аниқ кўринишда топилган.

In this paper, a general solution to fifth-order differential equations involving two independent variables and non-multiple real characteristics is provided, and the solution to the Cauchy problem is explicitly found.

В работе [1], [2] , [3] найдены необходимые и достаточные условие для того, чтобы дифференциальные уравнения пятого порядка в частных производных имели некратные характеристики, а также, приведены канонические виды дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными, а в [4], [5] изучены некоторые вопросы приведения к каноническим видам общих линейных уравнений в частных производных произвольного n –ного $(n \geq 6)$ порядка.

В данной работе приведено общее решение дифференциальных уравнений пятого порядка с двумя независимыми переменными с кратными действительными характеристиками и решение ЗАДАЧИ КОШИ найдено в явном виде..

В некоторой области Ω плоскости xOy рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных пятого порядка с двумя независимыми переменными, линейное относительно старших производных:

$$L[u] = \sum_{k=0}^{5} A_k \frac{\partial^5 u}{\partial x^{5-k} \partial y^k} = 0, \qquad (1)$$

где $A_k = const$, $A_k \neq 0$, $k = \overline{0,5}$.

Пусть характеристическое уравнение

$$A_0 t^n - A_1 t^{n-1} + A_2 t^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} A_{n-2} t^2 + (-1)^{n-1} A_{n-1} t + (-1)^n A_n = 0, \quad (t = dy/dx).$$
(2)

имеет пять различных действительных отличных от нуля корней: $t_1=\lambda_1$, $t_2=\lambda_2, t_3=\lambda_3$, $t_4=\lambda_4$ и $t_5=\lambda_5$. Тогда семейство линий $y-\lambda_n x=C_n$, $n=\overline{1,5}$ является характеристиками уравнения (1). Учитывая это, общее решения уравнения (1) из класса $C^5(R^2)$ можно представить в виде:

$$U(x,y)=f_1(y-\lambda_1 x)+f_2(y-\lambda_2 x)+f_3(y-\lambda_3 x)+f_4(y-\lambda_4 x)+f_5(y-\lambda_5 x),$$

где $f_n(y-\lambda_n x)\in C^5(R^2)$, $n=\overline{1,5}$-произвольные функции.

В работе [1] доказано, что если характеристическое уравнение имеет пять различных действительных отличных от нуля корней, тогда в области Ω уравнение (1) может быть приведено к следующему каноническом виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+c\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0. \qquad (3)$$

Так как уравнение (3) можно представить в виде

$$U_{xxxxx}-\left(b^2+1\right)U_{xxxyy}+b^2U_{xyyyy}-cU_{xxxxy}+\left(c+cb^2\right)U_{xxyyy}-cb^2U_{yyyyy}=0,$$

то характеристическое уравнение этого уравнения имеет вид

$$t^5+\left(b^2+1\right)t^4+b^2t^3+ct^2+\left(c+cb^2\right)t+cb^2=0, \qquad (4)$$

корни которого равны $t_1=-c$, $t_2=b$, $t_3=-b$, $t_4=1$ и $t_5=-1$.

Согласно с [6], дискриминантом уравнения (4) назовём выражение

$$D=\prod_{5\ge i>j\ge 1}(t_i-t_j)^2=16b^2(1-b^2)^4(b^2-c^2)^2(1-c^2)^2.$$

Так как уравнение (4) имеет пять различных действительных отличных от нуля корней, то $D>0$ и $b(1-b^2)(b^2-c^2)(1-c^2)\ne 0$. Тогда общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(x,y)=f_1(y+cx)+f_2(y-bx)+f_3(y+bx)+f_4(y-x)+f_5(y+x). \qquad (5)$$

Рассмотрим задачу Коши. Найти регулярное решение $U(x,y)\in C^5(R^2)$ уравнения (3) в плоскости независимых переменных (x,y), удовлетворяющих условиям на

нехарактеристической линии $y=0$:

$$U(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_1(x),\ \left.\frac{\partial^{n-1}U(x,y)}{\partial y^{n-1}}\right|_{y=0}=\varphi_n(x),\ n=\overline{2,5}, \qquad (6)$$

где $\varphi_n(x)\in C^5(0,l)$, $n=\overline{1,5}$-заданные функции, причем $\varphi_n(0)=0$, $n=\overline{1,5}$.

Решение задачи Коши ищем в виде (5) и определим функции f_n, $n=\overline{1,5}$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (6). Для этого, подставляя (5) в начальные условия, (6) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(cx)+f_2(-bx)+f_3(bx)+f_4(x)+f_5(-x)=\varphi_1(x) \\ f_1^{(I)}(cx)+f_2^{(I)}(-bx)+f_3^{(I)}(bx)+f_4^{(I)}(x)+f_5^{(I)}(-x)=\varphi_2(x) \\ f_1^{(II)}(cx)+f_2^{(II)}(-bx)+f_3^{(II)}(bx)+f_4^{(II)}(x)+f_5^{(II)}(-x)=\varphi_3(x) \\ f_1^{(III)}(cx)+f_2^{(III)}(-bx)+f_3^{(III)}(bx)+f_4^{(III)}(x)+f_5^{(III)}(-x)=\varphi_4(x) \\ f_1^{(IV)}(cx)+f_2^{(IV)}(-bx)+f_3^{(IV)}(bx)+f_4^{(IV)}(x)+f_5^{(IV)}(-x)=\varphi_5(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, имеем:

$$\begin{cases} f_1(cx)+f_2(-bx)+f_3(bx)+f_4(x)+f_5(-x)=\varphi_1(x) \\ \frac{1}{c}f_1(cx)-\frac{1}{b}f_2(-bx)+\frac{1}{b}f_3(bx)+f_4(x)-f_5(-x)=F_2(x) \\ \frac{1}{c^2}f_1(cx)+\frac{1}{b^2}f_2(-bx)+\frac{1}{b^2}f_3(bx)+f_4(x)+f_5(-x)=F_3(x) \\ \frac{1}{c^3}f_1(cx)-\frac{1}{b^3}f_2(-bx)+\frac{1}{b^3}f_3(bx)+f_4(x)-f_5(-x)=F_4(x) \\ \frac{1}{c^4}f_1(cx)+\frac{1}{b^4}f_2(-bx)+\frac{1}{b^4}f_3(bx)+f_4(x)+f_5(-x)=F_5(x) \end{cases}$$

где, $F_2(x)=\int_0^x\varphi_2(z)dz+C_{10}$, $F_3(x)=\int_0^x\left(\int_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz+C_{21}x+C_{20}$, $F_4(x)=\int_0^x\left(\int_0^z\left(\int_0^t\varphi_4(\xi)d\xi\right)dt\right)dz$

$+$

$+C_{32}x^2+C_{31}x+C_{30}$, $F_5(x)=\int_0^x\left(\int_0^z\left(\int_0^t\left(\int_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz+C_{43}x^3+C_{42}x^2+C_{41}x+C_{40}$.

Из последней системы уравнений находим:

$$f_1(y+cx)=\frac{c^4}{(b^2-c^2)(1-c^2)}\left[b^2F_5(x+\frac{y}{c})-(1+b^2)F_3(x+\frac{y}{c})+\varphi_1(x+\frac{y}{c})\right];$$

$$f_2(y-bx)=\frac{b^3}{2(b+c)(1-b^2)}\left[bcF_5(x-\frac{y}{b})-(b+c)F_4(x-\frac{y}{b})+(1-bc)F_3(x-\frac{y}{b})+(b+c)F_2(x-\frac{y}{b})-\varphi_1(x-\frac{y}{b})\right]$$

;

$$f_3(y+bx)=\frac{b^3}{2(1-b^2)(b-c)}\left[-bcF_5(x+\frac{y}{b})+(b-c)F_4(x+\frac{y}{b})+(1+bc)F_3(x+\frac{y}{b})-(b-c)F_2(x+\frac{y}{b})-\varphi_1(x+\frac{y}{b})\right]$$

$$f_4(y+x)=\frac{1}{2(1-b^2)(1-c)}\left[b^2cF_5(x+y)-b^2(1-c)F_4(x+y)-(b^2+c)F_3(x+y)+(1-c)F_2(x+y)+\varphi_1(x+y)\right]$$

$$f_5(y-x)=\frac{1}{2(1-b^2)(1+c)}\left[-b^2cF_5(x-y)+b^2(1+c)F_4(x-y)+(c-b^2)F_3(x-y)-(1+c)F_2(x-y)+\varphi_1(x-y)\right]$$

Подставим функции f_n, $n=\overline{1,5}$ в (5) и после некоторых преобразований, учитывая условия согласования, находим

$$
\begin{aligned}
U(x,y)=&\frac{c^4}{\left(b^2-c^2\right)\left(1-c^2\right)}\varphi_1\left(x+\frac{y}{c}\right)-\frac{b^3}{2(1-b^2)\left(b^2-c^2\right)}\left[(b+c)\varphi_1\left(x+\frac{y}{b}\right)+(b-c)\varphi_1\left(x-\frac{y}{b}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2(1-b^2)\left(1-c^2\right)}\left[(1+c)\varphi_1(x+y)+(1-c)\varphi_1(x-y)\right]-\frac{1}{2\left(1-b^2\right)}\left[b^3\int\limits_{x-\frac{y}{b}}^{x+\frac{y}{b}}\varphi_2(z)dz-\int\limits_{x-y}^{x+y}\varphi_2(z)dz\right]+\\
&-\frac{\left(1+b^2\right)c^4}{\left(b^2-c^2\right)\left(1-c^2\right)}\int\limits_0^{x+\frac{y}{c}}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz+\frac{b^4\left(1-c^2\right)}{2\left(b^2-c^2\right)\left(1-b^2\right)}\left[\int\limits_0^{x+\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz+\int\limits_0^{x-\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz\right]+\\
&+\frac{b^3c\left(1+b^2\right)}{2\left(b^2-c^2\right)\left(1-b^2\right)}\int\limits_{x-\frac{y}{b}}^{x+\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz-\frac{\left(b^2+c^2\right)}{2(1-b^2)(1-c^2)}\left[\int\limits_0^{x+y}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz+\int\limits_0^{x-y}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz\right]-\\
&-\frac{\left(b^2c+c\right)}{2(1-b^2)(1-c^2)}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left(\int\limits_0^z\varphi_3(t)dt\right)dz+\\
&+\frac{b^3}{2(1-b^2)}\int\limits_{x-\frac{y}{b}}^{x+\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\varphi_4(\xi)d\xi\right)dt\right)dz-\frac{b^2}{2(1-b^2)}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\varphi_4(\xi)d\xi\right)dt\right)dz+\\
&+\frac{b^2c^4}{\left(b^2-c^2\right)\left(1-c^2\right)}\int\limits_0^{x+\frac{y}{c}}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz-\frac{b^5c}{2\left(1-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)}\int\limits_{x-\frac{y}{b}}^{x+\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz-\\
&-\frac{b^4c^2}{2\left(1-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)}\left[\int\limits_0^{x-\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz+\int\limits_0^{x+\frac{y}{b}}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz\right]+\\
&+\frac{b^2c}{2(1-b^2)(1-c^2)}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz+\\
&+\frac{b^2c^2}{2(1-b^2)(1-c^2)}\left[\int\limits_0^{x+y}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz+\int\limits_0^{x-y}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\xi\varphi_5(\eta)d\eta\right)d\xi\right)dt\right)dz\right]. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что функция $U(x,y)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет уравнению (3) и условиям (6). Кроме того, нетрудно доказать, что если заданные функции $\varphi_n(x)\in C^5(0,l)$, $n=\overline{1,5}$, то $U(x,y)\in C^5(R^2)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Уринов А., Абдукодиров А. О канонических видах дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с некратными характеристиками// Бюллетень Института Математики. 2023. Т.6. №1.

2. Уринов А., Абдукодиров А. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка// Материалы второго

Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». –Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. С.251-254.

3. Абдукодиров А. О канонических видах дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка с кратными характеристиками// Бюллетень Института Математики. 2023. Т.6. №4.

4. Уринов А., Абдукодиров А. О приведении к каноническому виду дифференциальные уравнения с частными производными n-ого порядка// Тезисы докладов международной науч. конфер. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики», Фергана, 2020.-С.15-20.

5. Уринов А., Абдукодиров А. О канонических видах дифференциальных уравнений с частными производными n-ого порядка// Бюллетень Института Математики. 2023. Т.6. №5.

6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -Москва.: Наука, 1968.-432 с.