О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Каримов Зафар
студент 3 курса физика математического факультета Термезского государственного университета

Аннотация: *Данная работа посвящена описанию построения математических моделей на примере построения математической модели решения задачи Дирихле в прямоугольной области.*

Ключевые слова: *модель, математическая модель, процесс, объект, подход, задача, постановка задачи, условие, область, граница, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, оператор, метод разделения переменных.*

Annotation: *The present paper is devoted to the description of the construction of mathematical models using the example of constructing a mathematical model for solving the Dirichlet problem in a rectangular domain.*

Keywords: *model, mathematical model, process, object, approach, problem, problem formulation, condition, domain, boundary, Laplace's equation, Poisson's equation, operator, method of separation of variables.*

Одним из наиболее универсальных математических методов познания является метод математических моделей (математическое моделирование).

Различные элементы математического моделирования применялись одновременно с появлением точных наук. С данным фактом связано то, что часть из них носят имена корифеев* науки как, Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового среднеазиатского ученого Аль-Хорезми.

На протяжении многих веков математическое моделирование развивалось, и сегодня оно представляет собой мощный инструмент, используемый во всех областях науки и техники.

С помощью математического моделирования можно:

- Изучать сложные системы и явления, которые невозможно исследовать экспериментально.
- Прогнозировать поведение систем и явлений.
- Оптимизировать системы и процессы.
- Управлять системами и процессами.

Модель – это упрощенное представление реальной системы или явления, которое позволяет нам лучше понять их поведение.

Математическая модель – это описание какого-либо класса явлений реального мира на языке математики.

Существует множество различных типов математических моделей, которые могут быть классифицированы по разным критериям.

Наиболее распространенными типами математических моделей являются:

- Динамические модели – описывают изменение системы во времени.
- Статические модели – описывают систему в стационарном состоянии.
- Детерминированные модели – описывают системы, в которых будущее состояние полностью определяется начальным состоянием и внешними воздействиями.
- Стохастические модели – описывают системы, в которых будущее состояние не полностью определяется начальным состоянием и внешними воздействиями.

Математическое моделирование – это процесс создания и использования математических моделей для изучения реальных систем и явлений.

Математическое моделирование, являясь методологией, используется как инструмент в научных дисциплинах подобно математике, физике и биологии и не конкурирует с ними.

Математическое моделирование должно обеспечиваться выполнением следующих требований:

- четкая формулировка основных понятий и предположений, основанная на опыте (апостериорный);
- анализ адекватности используемых моделей;
- гарантированная точность вычислительных алгоритмов.

Построение математических моделей является достаточно трудным процессом, включающим большие затраты материальных и временных ресурсов, а также предполагает необходимость в специалистах высокого уровня с компетенциями как в предметной области, так и в таких областях, как прикладная математика, численные методы, программирование, современные вычислительные системы.

На следующем примере мы покажем построение математической модели задачи Дирихле в прямоугольной области

Построение математической модели на примере задачи Дирихле в прямоугольной области

Формулировка технического задания: Разработать математическую модель задачи Дирихле для уравнения Пуассона/Лапласа в прямоугольной области с заданными граничными условиями.

1. Постановка задачи

1.1. Область

- Тип: Прямоугольная область $D = (a, b) \times (c, d)$.
- Граница: $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где

- $\Gamma_1 = \{(x, c): a \leq x \leq b\}$,
- $\Gamma_2 = \{(b, y): c \leq y \leq d\}$,
- $\Gamma_3 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}): \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$,
- $\Gamma_4 = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}): \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}\}$.

1.2. Уравнение

• Тип: Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) второго порядка.

• Вид:

- Уравнение Пуассона: $\boldsymbol{\Delta u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ - заданная функция.
- Уравнение Лапласа: $\boldsymbol{\Delta u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ (частный случай уравнения Пуассона при $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$).

1.3. Граничные условия

• Тип: Задача Дирихле.

• Условие:

- На сторонах Г1 и Г3:
  - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x})$,
  - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x})$ - заданные функции.
- На сторонах Г2 и Г4:
  - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g_3}(\boldsymbol{y})$,
  - $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g_4}(\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{g_3}(\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{g_4}(\boldsymbol{y})$ - заданные функции.

2. Обозначения

• $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ - искомая функция (решение задачи)

• $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ - заданная функция (в уравнении Пуассона)

• $\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g_3}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{g_4}(\boldsymbol{y})$ - заданные функции (в граничных условиях)

• $\boldsymbol{\Delta}$ - оператор Лапласа: $\boldsymbol{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

3. Решение задачи

3.1. Разделение переменных

1. Представим искомую функцию $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в виде произведения:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y})$$

2. Подставим это выражение в уравнение:

$$\boldsymbol{\Delta u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[X(x)Y(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[X(x)Y(y)] = -f(x, y)$$

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -f(x, y)$$

3. Разделим обе части уравнения на $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y})$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -f(x, y)$$

4. Обозначим постоянную разделения:

$$\boldsymbol{\lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}}$$

5. Получим два обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ):

- Уравнение для $\boldsymbol{X(x)}$:

$$\boldsymbol{X''(x) + \lambda X(x) = 0}$$

- Уравнение для $\boldsymbol{Y(y)}$:

$$\boldsymbol{Y''(y) - \lambda Y(y) = 0}$$

3.2. Решение уравнений

3.2.1. Решение уравнения для $\boldsymbol{X(x)}$

- Общее решение уравнения $\boldsymbol{X''(x) + \lambda X(x) = 0}$ зависит от значения $\boldsymbol{\lambda}$:
  - Если $\boldsymbol{\lambda > 0}$:
    - $\boldsymbol{X(x) = C_1 cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 sin(\sqrt{\lambda} x)}$
  - Если $\boldsymbol{\lambda = 0}$:
    - $\boldsymbol{X(x) = C_1 x + C_2}$
  - Если $\boldsymbol{\lambda < 0}$:
    - $\boldsymbol{X(x) = C_1 cosh(\sqrt{-\lambda} x) + C_2 sinh(\sqrt{-\lambda} x)}$
- Граничные условия:
  - На сторонах Γ_1 и Γ_3:
    - $u(a, y) = g_1(y)$
    - $u(b, y) = g_2(y)$

Подстановка $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в граничные условия приводит к системе уравнений для определения C_1 и C_2.

3.2.1. Решение уравнения для $Y(y)$

- Общее решение уравнения $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ зависит от значения λ:
  - Если $\lambda > 0$:
    - $Y(y) = C_3 \cosh(\sqrt{\lambda} y) + C_4 \sinh(\sqrt{\lambda} y)$
  - Если $\lambda = 0$:
    - $Y(y) = C_3 y + C_4$
  - Если $\lambda < 0$:
    - $Y(y) = C_3 \cos(\sqrt{-\lambda} y) + C_4 \sin(\sqrt{-\lambda} y)$
- Граничные условия:
  - На сторонах Γ_2 и Γ_4:
    - $u(x, c) = g_3(y)$
    - $u(x, d) = g_4(y)$

Подстановка $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в граничные условия приводит к системе уравнений для определения C_3 и C_4.

3.3. Общее решение задачи

После решения систем уравнений для $C_1, C_2, C_3,$ и C_4 общее решение задачи Дирихле в прямоугольной области записывается как:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y),$$

где $Xn(x)$ и $Yn(y)$ - решения соответствующих ОДУ с учетом граничных условий.

Итак мы построили модель на примере задачи Дирихле в прямоугольной области и нашли для нее общее решение.

При построении моделей в основном используют два подхода:

- дедуктивный (от общего к частному);
- индуктивный (от частного к общему).

При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели. Здесь при заданных предположениях известная модель приспосабливается к условиям моделируемого объекта. Например, можно построить модель свободно падающего тела на основе известного закона Ньютона и в качестве допустимого приближения принять модель равноускоренного движения для малого промежутка времени.

Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, затем синтез. Здесь широко используется подобие, аналогичное моделированию, умозаключение с целью формирования каких-либо закономерностей в виде предположений о поведении системы. Например, подобным способом происходит моделирование строения атома.

Среди подходов к разработке математических моделей относят:

1. Фундаментальные законы природы. Данный принцип является самым распространенным и заключается в использовании фундаментальных законов природы применительно к конкретной ситуации.

2. Вариационные принципы. Данный подход по широте и универсальности сравним с первым подходом и заключается в применении вариационных принципов, которые являются утверждениями об исследуемом объекте.

3. Применение аналогий при построении моделей. Метод аналогий применяется, когда невозможно выбрать фундаментальные законы или вариационные принципы.

4. Иерархический подход к получению моделей. При иерархическом построении общей модели сложной системы задача оптимизации всей системы распадается на ряд частных задач оптимизации на различных уровнях.

5. Блочный принцип. При построении математических моделей широко используют блочный принцип. Модель строится из отдельных логически законченных блоков, отражающих ту или иную сторону рассматриваемого процесса. Блочный принцип построения моделей позволяет разбить общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем

самым упростить ее решение, а также использовать разработанные блоки в других моделях, модернизировать отдельные блоки и заменять их на новые.

На сегодняшний день математическое моделирование является самым передовым и эффективным методом моделирования, открывающий путь к применению мощных современных методов математического анализа, вычислительной математики и программирования для изучения и оптимизации технических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2019. — 112 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учебное пособие. – 6-е издание, исправленное и дополненное. – Москва: Издательство МГУ, 1999. — 799 с.
3. Сабитов К. Б. Уравнения математической физики. – Москва: Издательство ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.
4. Джавлиева Г. On The Importance Of Historicism Elements In Mathematics Lessons In Elementary Grades //Журнал
The American Journal of Applied Sciences (ISSN – 2689-0992)