IKKI KARRALI INTEGRALLARDA O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH USULI

Aktamov Feruz Sanaqulovich
Chirchiq davlat pedagogika universiteti Algebra va matematik analiz kafedrasi tayanch doktoranti feruzaktamov28@gmail.com
Xaldurdiyeva Lachin Abajan qizi
Chirchiq davlat pedagogika universiteti Matematika va informatika fakulteti 3-kurs talabasi sounovabazan@gmail.com

Ikki karrali integral - bu tekislikning ma'lum sohasida, 3 o'lchovli yoki n o'lchovli fazoda berilgan funksiyalardan olingan integral deyiladi. Ikki karrali integral, odatda 2 karrali yoki ikki o'lchovli integrallar deb yuritiladi. Ikki karrali integralni hisoblash uchun, tekislikning sohasini kichik elementar sohalarga bo'lib, har bir sohada funksiyaning qiymatini sohaning yuzasiga ko'paytirib, barcha ko'paytmalarni qo'shish kerak. Agar elementar sohalar diametri nolga intilganda, integral yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, u limit ikki karrali integralga teng bo'ladi. Ikki karrali integralni mavjud bo'lishi uchun, funksiyaning sohadagi tebranishi chegaralangan bo'lishi zarur..

Ikki karrali integrallarni qo'llanilishi juda keng va turli xil sohalarda uchraydi. Masalan, ikki karrali integrallar yordamida quyidagi masalalarni hal qilish mumkin:

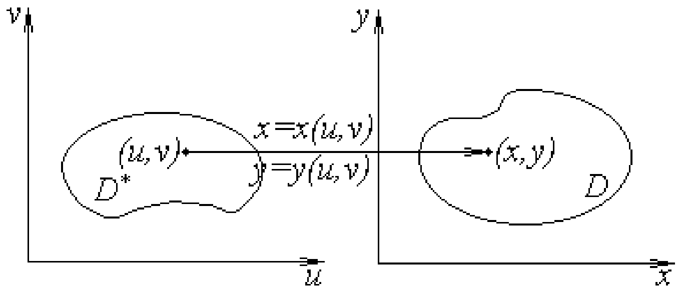
- tekislikning yuzini, silindrik jismning hajmini, massani, momentlarni, elektr maydonining potentsialini va boshqalarini topish;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning o'rtacha qiymatini, dispersiyasini, standart nuqtalik xatolikni va boshqalarini hisoblash;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning maksimum va minimum qiymatlarini topish;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlash;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning integral yoki differensial tenglamalarini yechish;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning grafikasini chizish;
- tekislikning ma'lum bir sohasida funksiyaning tayyorlash, interpolatsiya, approksimatsiya va boshqalarini amalga oshirish.

Ikki karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirishdan oldin, keling, ikki karrali integrallar mavzusini bir eslab o'tamiz.

Ikki karrali integral o'zi nima?

Ikki karrali integralni o'rganishni ham huddi aniq integraldagi kabi unga olib keladigan masalani keltirishdan boshlaymiz.

Masala: $f(x,y)$ funksiya chegaralangan (D) sohada $(D\subset R^2)$ berilgan, uzluksiz hamda $\forall(x,y)\in(D)$ uchun $f(x,y)\geq 0$ bo'lsin. R^3 fazoda $Oxyz-$Dekart koordinata sistemasini olaylik. Yuqoridan $z = f(x,y)$ sirt bilan, yon tomondan, yasovchilari Oz o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt hamda pastdan Oxy tekisligidagi (D) soha bilan chegaralangan (V) jismni qaraylik (1-chizma).



1-chizma

(V) jismning hajmini topish talab etilsin.

Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada o'zgarmas bo'lsa, $f(x,y) = C$ $(C - const)$, u holda (V) jismning (silindirning) hajmi

$$V = C \cdot D$$

ga teng bo'ladi, bunda $D - (D)$ sohaning yuzi.

Agar (D) sohada $f(x,y)$ x va y o'zgaruvchilarning ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi bo'lsa, u holda (V) jismning hajmini topish uchun, avvalo (D) sohani egri chiziqlar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz: $(D) = \bigcup_{k=1}^{n} (D_k)$. Bo'luvchi chiziqlarni yo'naltiruvchi sifatida olib Oz o'qiga parallel silindrik sirtlar o'tkazamiz. Natijada (V) jism n ta (V_k) $(k = 1,2,3,...,n)$ bo'laklarga ajraladi. So'ng har bir (D_k) $(k = 1,2,3,...,n)$ da $\forall(\xi_k,\eta_k)$ nuqta olamiz. Bu (D_k) da $f(x,y)$ funksiyani o'zgarmas va $f(\xi_k,\eta_k)$ ga teng desak, u holda (V_k) bo'lakning hajmi taxminan

$$f(\xi_k,\eta_k) \cdot D_k$$

bo'lib, (V) jismning hajmi esa taxminan

$$(V) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x,y) \cdot D_k$$

bo'ladi, bunda $D_k - (D_k)$ ning yuzi.

(V) jismning hajmini ifodalovchi bu formula tarkibiydir. Chunki, $f(x,y)$ ni har bir (D_k) da o'zgarmas $f(\xi_k,\eta_k)$ deb hisobladik: $f(x,y) = f(\xi_k,\eta_k)$, agar $(x,y) \in (D_k)$ bo'lsa.

Endi (D) sohani bo'laklarga bo'linish sonini shunday orttira boraylikki, bunda har bir (D_k) $(k = 1,2,3,...,n)$ bo'lakning diametri nolga intila borsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

qiymat izlanayotgan (V) jismning hajmini tobora aniqroq ifodalay boradi deb hisoblash tabiiydir. Demak, masala yuqoridagi yig'indining limitini toppish bilan hal qilinadi. Bunday yig'indining limiti ikki karrali integral tushunchasiga olib keladi.

Ikki karrali integral ta'rifi. Ikki karraki integralni ta'riflashdan oldin ba'zi bir tushunchalar, jumladan (D) sohaning bo'linishi, funksiyaning integral yig'indisi tushunchalari bilan tanishamiz.

Biror chegaralangan $(D) \subset R^2$ soha berilgan bo'lsin. (D) sohaning chegaradagi ixtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi va butunlay shu sohada yotuvchi chiziqni (egri chiziqni) l chiziq deb ataymiz. Ravshanki, bunday chiziqlar (D) sohani bo'laklarga ajratadi.

Shuningdek, (D) sohada butunlay yotuvchi yopiq chiziqni ham l chiziq deb qaraymiz. Bunday chiziqlar ham (D) sohani bo'laklarga ajratadi. Bu sohani bo'laklarga ajratuvchi chekli sondagi l chiziqlar sistemasi $\{l : l \subset (D)\}$ (D) sohaning bo'linishi deb ataladi va $P = \{l : l \subset (D)\}$ kabi belgilanadi. (D) sohani bo'laklarga ajratuvchi har bir l chiziq P bo'linishning bo'luvchi chizig'i, (D) sohaning bo'lagi esa P bo'linishning bo'lagi deyiladi. P bo'linish bo'laklari diametrining eng kattasi P bo'linishning diametri deyiladi va λ_p kabi belgilanadi.

Misol: $(D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ bo'lsin. Quyidagi

$$x = x_i = \frac{i}{4} \quad (i = 0,1,2,3,4),$$

$$y = y_k = \frac{k}{3} \quad (k = 0,1,2,3)$$

chiziqlar sistemasi (D) sohaning P_1 bo'linishi,

$$x = x_i = \frac{i}{n} \quad (i = 0,1,2,\dots,n),$$

$$y = y_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

chiziqlar sistemasi esa shu sohaning boshqa P_2 bo'linishi bo'ladi. Ularning diametri $\lambda_{P_1} = \frac{5}{12}$, $\lambda_{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{n}$ gat eng.

Demak, (D) soha berilgan holda, bu sohani turli usullar bilan bo'linishlarini tuzish mumkin. Natijada (D) sohaning bo'linishlari to'plami hosil bo'ladi. Uni $\rho = \{P\}$ kabi belgilaylik.

$f = (x, y)$ funksiya $(D) \subset R^2$ sohada berilgan bo'lsin. Bu sohaning $P \in \rho$ bo'linishini va bu bo'linishning har bir (D_k) $(k = 1, 2, ..., n)$ bo'lagida ixtiyoriy (ξ_k, η_k) $(k = 1, 2, ..., n)$ nuqtani olaylik. Berilgan funksiyaning (ξ_k, η_k)cnuqtadagi qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni D_k $(D_k - (D_k)$ sohaning yuzi) ga ko'paytirib quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k$$

yig'indini tuzamiz.

1-tarif: Ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k \qquad (1)$$

yig'indi, $f(x, y)$ funksiyaning *integral yig'indisi* yoki *Riman yig'indisi* deb ataladi.

Misol: 1. $f(x, y) = x \cdot y$ funksiyaning (D) sohadagi integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \eta_k \cdot D_k$$

bo'ladi, bunda

$(\xi_k, \eta_k) \in (D_k)$ $(k = 1, 2, ..., n).$

2. Ushbu

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, \ agar\, (x, y) \in (D)\, da, x - ratsional\, son, \ y - ratsional\, son\, bo'lsa, \\ 0, \ agar (x, y) \in (D)\, da, x\, va\, y\, larning\, kamida\, bittasi\, irratsional\, son \\ \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyaning integral yig'indisi quyidagicha bo'ladi:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \psi(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = \begin{cases} D, \ agar\, barcha\, \xi_k\, va\, \eta_k\, lar\, ratsional\, son\, bo'lsa, \\ 0, \ agar\, barcha\, \xi_k\, yoki\, barcha\, \eta_k\, lar\, irratsional\, son \\ \quad bo'lsa. \end{cases}$$

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x, y)$ funksiyaning integral yig'indisi σ qaralayotgan $f(x, y)$ funksiyaga (D) sohaning bo'linish usuliga ko'ra hamda har bir (D_k) dan olingan ξ_k, η_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi, yani

$\sigma_P = \sigma_P(\xi_k, \eta_k)$.

$f(x,y)$ funksiya chegaralangan $(D) \subset R^2$ sohada berilgan bo'lsin. Bu (D) sohaning shunday

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m,\ \ldots \qquad (2)$$

bo'linishlarni qaraymizki, ularning diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{P_1},\ \lambda_{P_2},\ \ldots,\ \lambda_{P_m},\ \ldots$$

ketma-ketlik nolga intilsin: $\lambda_{P_m} \to 0$. Bunday $P_m\ (m = 1,\ 2,\ \ldots)$ bo'linishlarga nisbatan $f(x,y)$ funksiyaning integral yig'indisini tuzamiz.

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k.$$

Natijada (D) sohaning (2) bo'linishlariga mos $f(x,y)$ funksiya integral yig'indilari qiymatlaridan iborat quyidagi

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_m,\ \ldots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning har bir hadi (ξ_k, η_k) nuqtalarga bog'liq.

2-tarif. Agar (D) sohaning har qanday (2) bo'linishlar ketma-ketligi $\{P_m\}$ olinganda ham, unga mos integral yig'indi qiymatlaridan iborat $\{\sigma_m\}$ ketma-ketlik, (ξ_k, η_k)nuqtalarni tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan holda hamma vaqt bitta I singa intilsa, bu I ga σ $yig'indining\ limiti$ deb ataladi va u

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot D_k = I$$

kabi belgilanadi.

Integral yig'indining limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

3-ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\exists \delta > 0$son topilsaki, (D) sohaning diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'linishi hamda har bir (D_k) bo'lakdagi $\forall(\xi_k, \eta_k)$ lar uchun

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I ga σ $yig'indining\ limiti$ deb ataladi va u

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = I$$

kabi belgilanadi.

Endi $f(x,y)$ funksiyaning (D) soha bo'yicha ikki karrali integralining ta'rifini keltiramiz.

4-ta'rif: Agar $\lambda_P \to 0$ da $f(x,y)$ funksiyaning integral yig'indisi σ chekli limitga ega bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya (D) sohada *integrallanuvchi* (*Riman ma'nosida integrallanuvchi*) *funksiya* deyiladi.

Bu σ yig'indining chekli limiti I esa $f(x,y)$ funksiyaning (D) soha bo'yicha *ikki karrali integrali* (*Riman integrali*) deyiladi va u

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD = \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) D_k \, .$$

Birinchi punktda keltirilgan (V) jismning hajmi $f(x,y)$ funksiyaning (D) soha bo'yicha ikki karrali integralidan iborat ekan.

Ikki karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli

Ikki karrali integrallarni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli - bu berilgan integraldagi o'zgaruvchidan yangi o'zgaruvchiga biror funksiya orqali o'tish usulidir. Bunda funksiya differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda unga teskari mavjud deb olinadi. Bu usul integrallashni soddalashtirish, integral chegaralarini osonlashtirish yoki integral ostidagi ifodani standart ko'rinishga keltirish uchun qo'llaniladi. Ikki karrali integrallarni hisoblashda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli quyidagi bosqichlardan iborat:

- Berilgan integral ostidagi ifodani yangi o'zgaruvchilarga almashtirish funksiyasini tanlash;
- Yangi o'zgaruvchilarni eski o'zgaruvchilarga almashtirish funksiyasining yakobianini hisoblash;
- Integral ostidagi ifodani va differensialni yangi o'zgaruvchilarga almashtirish;
- Integral chegaralarini yangi o'zgaruvchilarga almashtirish;
- Hosil bo'lgan integralni hisoblash yoki boshqa usullardan foydalanib yechish.

Endi ikki karrali integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan batafsil tanishib chiqamiz va unga doir bir nechta misollarni tahlil qilamiz

$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$ ikki o‘lchovli integralda x, y to‘g‘ri burchakli koordinatalar x, y bilan quyidagicha munosabatlar orqali bog‘langan yangi u, v koordinatalarga o‘tkaziladi

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v). (1)$$

Agar D va D^* sohalar(1-shakl) o‘rtasida (1) munosabatlar orqali o‘zaro bir qiymatli akslantirish o‘rnatilgan bo‘lsa, shu bilan birga akslantirish yakobiani

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

bo‘lsa, quyidagi formula o‘rinlidir:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|du\,dv. \quad (2)$$

(2) formulada $J(u,v)$ yakobianni hisoblashda

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}^{-1} \qquad (3)$$

tengliklar bilan ifodalangan formulasidan foydalanish ham mumkin.

Endi (2) formula isbotini ko'rib chiqamiz.

$f(x,y)$ funksiya (D) sohada $((D)\subset R^2)$ berilgan va shu sohada uzluksiz bo'lsin. (D) esa soda, bo'lakli – silliq chiziq bilan chegaralangan soha bo'lsin. Demak, $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'ladi.

Ushbu

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi^*(u,v)\\ y&=\psi^*(u,v)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

sistema D^* sohani D sohaga akslantirsin va bu akslantirish barcha shartlarni bajarsin.

D^* sohaning P_{D^*} bo'linishni olamiz va $f(x,y)$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot D_k.$$

ni tuzamiz.

$$\lim_{\lambda_{P_D}\to 0}\sigma=\lim_{\lambda_{P_D}\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\cdot D_k=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy. \qquad (5)$$

Yuqoridagi (4) formulaga ko'ra

$$D_k=\iint_{D_k^*}\left|I(u,v)\right|dudv$$

bo'ladi. O'rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib quyidagini topamiz:

$$D_k=\left|I(u_k^*,v_k^*)\right|\cdot D_k^* \qquad ((u_k^*,v_k^*)\in(D_k^*)),$$

bunda $D_k^*-(D_k^*)$ ning yuzi. Natijada (5) yig'indi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \left| I(u_k^*, v_k^*) \right| \cdot D_k^*$$

ko'rinishga keladi.

(ξ_k, η_k) nuqtaning (D_k^*) ixtiyoriy nuqta ekanligidan foydalanib, uni

$\varphi(u_k^*, v_k^*) = \xi_k$,

$\psi(u_k^*, v_k^*) = \eta_k$

deb olish mumkin. U holda

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*)) \left| I(u_k^*, v_k^*) \right| \cdot D_k^*$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| I(u,v) \right|$$

funksiya (D^*) sohada uzluksiz. Demak, u shu sohada integrallanuvchi. U holda

$$\lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_{P_D} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k^*, v_k^*), \psi(u_k^*, v_k^*) \left| I(u_k^*, v_k^*) \right| \cdot D_k^* =$$
$$= \iint_{(D^*)} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| I(u,v) \right| dudv \qquad (6)$$

bo'ladi.

$\lambda_{P_{D^*}} \to 0$ da $\lambda_{P_D} \to 0$ bo'lishini e'tiborga olib, (5) va (6) munosabatlardan

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy \iint_{(D^*)} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| I(u,v) \right| dudv \qquad (7)$$

bo'lishini topamiz.

Bu ikki karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasidir.

1-misol. Ikki karrali integralni hisoblang: $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy$, bu yerda D soha $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan kvadratdir.

$x+y=u$, $x-y=v$ almashtirishni bajaramiz, bundan $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$. U holda almashtirishning Yakobiani

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Demak, $|J| = \frac{1}{2}$.

Bundan, $\iint\limits_{D} (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{D^*} u^3 v^2 dudv$.

D^* soha $u=1; u=3, \ v=-1, v=1$ chiziqlar bilan chegaralangan kvadrat bo'lgani uchun,

$$\iint\limits_{D} (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du \int_{-1}^{1} v^2 dv = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_{-1}^{1} du =$$

$$= \frac{1}{6} \int_1^3 u^3 (1+1) du = \frac{1}{12} u^4 \Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

Ma'lumki, to'g'ri burchakli x,y va qutb r, φ koordinatalar o'zaro

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

munosabatlar bilan bog'langan. Bu yerda $r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Ikki karrali integralda to'gri burchakli koordinatalardan qutb koordinatalarga o'tish quyidagi formula orqali amalga oshiriladi:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi . \qquad (4)$$

Integrallash chegaralari O qutbning vaziyatiga bog'liq bo'ladi.

a) Agar O qutb $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ nurlar, hamda $r = r_1(\varphi)$ va $r = r_2(\varphi)(r_1(\varphi) < r_{21}(\varphi))$ chiziqlar bilan chegaralangan D soha tashqarisida yotsa, shuningdek, $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ nurlar soha chegarasini ikki nuqtada kesib o'tsa, ikki karrali integral quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \ (5)$$

b) Agar O qutb D soha ichida joylashgan bo'lsa va bu soha chegarasi qutb koordinatalar sistemasida $r = r(\varphi)$ ko'rinishiga ega bo'lsa, u holda ikki karrali integral quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) dxdy = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \ (6)$$

c) Agar O qutb $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ nurlar bilan chegaralangan D soha chegarasida yotsa, shu bilan birga, chegaraning qutb koordinatalar sistemasida tenglamasi $r = r(\varphi)$ ko'rinishiga ega bo'lsa, u holda ikki karrali integral quydagi formula bilan hisoblanadi:

$$\iint\limits_{D} f(x,y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. (7)$$

2-misol. $\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy$ integralda, qutb koordinatalari sistemasiga o'tib, integral chegarasini qo'ying. Bu yerda

$$D:\left\{x^2+y^2=x\sqrt{6},\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right),y=0\left(y\geq 0,x\leq\sqrt{6}\right)\right\}$$

$$x^2+y^2=x\sqrt{6}\Rightarrow r^2=r\sqrt{6}\cos\varphi\Rightarrow r=\sqrt{6}\cos\varphi$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right)\Rightarrow r^4=9r^2\cos 2\varphi\Rightarrow r^2=9\cos 2\varphi\Rightarrow r=3\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} r=\sqrt{6}\cos\varphi \\ r^2=9\cos 2\varphi \end{cases}\Rightarrow 9\cos 2\varphi=6\cos^2\varphi$$

$$9\left(2\cos^2\varphi-1\right)=6\cos^2\varphi$$

$$12\cos^2\varphi=9$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bundan, $y\geq 0$ bo'lgani uchun, quyidagiga ega bo'lamiz: $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Demak, (7) ga ko'ra,

$$\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{\sqrt{6}\cos\varphi}rf\left(r^2\right)dr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}}rf\left(r^2\right)dr.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

T.Azlarov "Matematik analiz" Toshkent "O'qituvchi" 1989

H.R.Shokirova "Karrali va egri chiziqli integrallar" Toshkent "O'zbekiston" 1992

A.Gaziyev, I.Israilov, M.Yaxshiboyev "Matematik analizdan misol va masalalar" Toshkent "Yangi asr avlodi" 2006

A.Saydullayev "Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami" Toshkent "O'zbekiston" 1995