7 – TOM 2 – SON / 2024 - YIL / 15 - FEVRAL

MATEMATIKADA HAQIQIY SONLAR

Kalandarova Salomat Hayitbaevna
Toshkent shahri Olmazor tumani
326-son maktabning matematika fani o'qituvchisi
Karakuzieva Shoira Kamiljanovna
Toshkent shahri Mirobod tumani
175-son maktabning matematika fani o'qituvchisi
Usmanova Marxabo Saidmaxmudovna
Toshkent shahri Mirzo Ulug'bek tumani
V.Uspenskiy nomli RIMM matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya: *Haqiqiy sonlar - har qanday musbat, manfiy son yoki nol. Haqiqiy sonlar to'plami ratsional sonlar va irratsional sonlar to'plamining birlashmasidan iborat. Haqiqiy sonlar to'plami son o'qi deb ham ataladi. Ushbu maqolada haqiqiy sonlarga tegishli asosiy tushunchalarga ta'rif berilgan.*

Kalit so'zlar: *sonlar to'plami, ratsional sonlar, manfiy sonlar, haqiqiy sonlar, cheksiz davriy o'nli kasrlar, to'plam, element, kasr, nuqta, interval.*

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В МАТЕМАТИКЕ

Каландарова Саломат Хаитбаевна
Алмазарский район города Ташкента
Учитель математики школы №326
Каракузиева Шоира Камильжановна
Мирабадский район, город Ташкент
Учитель математики школы №175
Усманова Мархабо Саидмахмудовна
г.Ташкент, Мирзо-Улугбекский район
Учитель математики РИММ им. В. Успенского

Аннотация: *действительные числа - любое положительное, отрицательное число или ноль. Набор действительных чисел состоит из комбинации набора рациональных чисел и набора иррациональных чисел. Набор действительных чисел также называется числовой осью. В этой статье дается определение основных понятий, относящихся к действительным числам.*

Ключевые слова: *набор чисел, рациональные числа, отрицательные числа, действительные числа, бесконечные периодические десятичные дроби, набор, элемент, дробь, точка, интервал.*

REAL NUMBERS IN MATHEMATICS

Kalandarova Salomat Hayitbaevna
Almazor district, Tashkent city
Mathematics teacher of school № 326
Karakuzieva Shoira Kamiljanovna
Mirabad district, Tashkent city
Mathematics teacher of school № 175
Usmanova Markhabo Saidmakhmudovna
Tashkent city, Mirzo Ulugbek district
RIMM teacher of mathematics named after V. Uspensky

Annotation: *real numbers are any positive, negative number or zero. The set of real numbers is a combination of the set of rational numbers and the set of irrational numbers. The set of real numbers is also called the number axis. This article provides a definition of basic concepts pertaining to real numbers.*

Key words: *set of numbers, rational numbers, negative numbers, real numbers, infinite periodic decimal fractions, set, element, fraction, point, interval.*

Son tushunchasi uzoq o‘tmishdan ma’lum. Odamlar sanash taqozosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... – natural sonlarni qo‘llaganlar. So‘ngra manfiy son, ratsional son va nihoyat, haqiqiy son tushunchasi kiritilgan va o‘rganilgan.

Haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida tasvirlaydigan bo‘lsak, har bir haqiqiy songa o‘qda bitta nuqta mos keladi va aksincha, sonlar o‘qidagi har bir nuqtaga faqat bitta haqiqiy son mos keladi.

Haqiqiy sonlar to‘plamining muhim xususiyatlaridan biri uning uzluksizligidir. Uzluksizlik prinsipi turli shakllarda bayon qilinishi mumkin. Haqiqiy sonlar nazariyasi matematikaning muhim masalalaridan biri bo‘lib, bu nazariya XIX asrning 2-yarmida Veyershtrass, R.Dedekind, G.Kantor tomonidan yaratilgan. Barcha fizik kattaliklarni o‘lchash natijalari Haqiqiy sonlar bilan ifodalanadi.

Haqiqiy sonlarning matematika kursida muhimligini e’tiborga olib, ular haqidagi asosiy ma’lumotlarni bayon etamiz.

Ratsional sonlar va cheksiz davriy o‘nli kasrlar.

Ta’rif. $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr ko`rinishda tasvirlash mumkin bo`lgan sonlar ratsional sonlar deyiladi. Bunda a,b – butun sonlar va $b \neq 0$.

Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ biror musbat ratsional son bo‘lsin. Bo‘lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q ga bo‘lamiz. Agar p ni q ga bo‘lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo‘lsa, u holda bo‘lish jarayon to‘xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o‘nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o‘nli kasr chekli o‘nli kasr deyiladi. Masalan, $\frac{59}{40}$ kasrda 59 ni 40 ga bo‘lib, uni 1,475 bo‘lishini topamiz:

$$\frac{59}{40}=1{,}475.$$

Agar p ni q ga bo‘lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma’lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchraydi, so‘ng undan oldingi raqamlar mos tartibda takrorlanadi.

Odatda bunday kasr cheksiz davriy o‘nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o‘nli kasrning davri bo‘ladi.

Masalan, $\frac{1}{3}$ kasrda 1 ni 3 ga bo‘lib, 0,333... bo‘lishini topamiz;

$$\frac{1}{3}=0{,}333...$$

Ushbu 0,333... , 1,4777... , 2,131313... kasrlar cheksiz davriy o‘nli kasrlardir. Ularning davri mos ravishda 3, 7, 13 bo‘ladi va bu cheksiz davriy o‘nli kasrlar quyidagicha 0,(3), 1,4(7), 2,(13) yoziladi;

$$0,(3)=0{,}333...$$

$$1{,}4(7)=1{,}4777...$$

$$2,(13)=2{,}131313....$$

Shuni ta’kidlaymizki, davri 9 ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib yoziladi.

Masalan,

$$0{,}4999...=0{,}4(9)=0{,}5,$$

$$2{,}71999...=2{,}71(9)=2{,}72.$$

Har qanday chekli o‘nli kasrni nollar bilan davom ettirib cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan,

$$1{,}4=1{,}4000...=1{,}4(0)$$

$$0{,}75=0{,}75000...=0{,}75(0).$$

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Aksincha, har qanday cheksiz davriy o‘nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan, ushbu $0,(3)=0,333...$, $7,31(06)=7,31060606...$

cheksiz davriy o'nli kasrlarni qaraylik. Avvalo ularni

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...,$$

$$7,31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+...$$

ko'rinishda yozib, so'ng cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$0,(3)=0,333...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3},$$

$$7,31(06)=7,31060606...=\frac{731}{100}+\frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{965}{132}.$$

Demak, ixtiyoriy ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Haqiqiy son tushunchasi. Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham bo'ladi. Bu kesmalarni o'lchash jarayonida yuzaga kelishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, biror J kesma hamda o'lchov birligi, masalan metr berilgan bo'lsin. J kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr J kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning J_1 qismi ortib qolsin. Ravshanki J_1 ning uzunligi 1 metrdan kam bo'ladi. Bu holda J kesmaning uzunligini taxminan 5 m. ga teng deb olish mumkin:

J uzunligi ≈ 5 m.

Agar bu aniqlik yetarli bo'lmasa, o'lchov birligining $\frac{1}{10}$ qismini, ya'ni 1 dm. ni olib, uni J_1 kesmaga joylashtiramiz. Aytaylik, 1 dm. J_1 kesmada 7 marta butunlay joylashib, J_1 kesmaning J_2 qismi ortib qolsin. Bunda J_2 ning uzunligi 1 dm. dan kichik bo'ladi. Bu holda J kesmaning uzunligi taxminan 5,7 m ga teng deb olinishi mumkin:

J uzunligi $\approx 5,7$ m.

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) biror qadamdan keyin, masalan $n+1$ qadamdan keyin o‘lchov birligining $\frac{1}{10^n}$ qismi J_n kesmaga α_n marta butunlay joylashadi. Bu holda o‘lchov jarayoni to‘xtatilib, J uzunligi $=5,\underbrace{7\ldots\alpha_n}_{n\text{ та ракам}}$. bo‘lishi topiladi.

2) o‘lcham jarayoni to‘xtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda J kesmaning uzunligining aniq qiymati deb ushbu $5,7..\alpha_n\ldots$

cheksiz o‘nli kasr olinadi:

J uzunligi $=5,7..\alpha_n\ldots$

Aytaylik, to‘g‘ri chiziqda biror O nuqta (koordinata boshi) hamda o‘lchov birligi tayinlangan bo‘lsin. U holda O nuqtadan o‘ngda joylashgan har bir P nuqtaga, OP kesmani o‘lchash natijasida hosil bo‘lgan ushbu $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n\ldots$ cheksiz o‘nli kasrni mos qo‘yish mumkin. Bunda

$\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n\geq 1.$

Bu moslik o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘ladi. Ravshanki, yuqoridagi cheksiz o‘nli kasrlar orasida cheksiz davriy o‘nli kasrlar bo‘lib, ular manfiy bo‘lmagan ratsional sonlar bo‘ladi. Qolgan kasrlar esa ratsional sonlar bo‘lmaydi.

1-ta’rif. Ushbu $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n\ldots.$,

ko‘rinishidagi cheksiz o‘nli kasr manfiy bo‘lmagan haqiqiy son deyiladi, bunda $\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n\geq 1$.

Agar $\exists n\geq 0; \alpha_n>0$ bo‘lsa, u musbat haqiqiy son deyiladi. Manfiy haqiqiy sonning «–» ishora bilan olingani musbat haqiqiy son sifatida ta’riflanadi.

Barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plam R harfi bilan belgilanadi. Barcha natural sonlar to‘plami N, ratsional sonlar to‘plami Q, haqiqiy sonlar to‘plami R uchun $N\subset Q\subset R$ bo‘ladi.

2-ta’rif. Ushbu $R\setminus Q$ to‘plam elementi (son) irratsional son deyiladi.

Biz yuqorida, davri «9» ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib olinishini aytgan edik. Buning oqibatida bitta son ikki ko‘rinishga, masalan, $\frac{1}{2}$ soni

$$\frac{1}{2}=0{,}5000\ldots$$

$$\frac{1}{2}=0{,}4999\ldots$$

ko‘rinishlarga ega bo‘lib qoladi.

Umuman, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\ \ (\alpha_n\neq 0)$ ratsional son ushbu,

1) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{n-1}\ \ (\alpha_n-1)999\ldots,$

2) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n000...$, ikki ko‘rinishda yozilishi mumkin. Haqiqiy sonlarni solishtirishda ratsional sonning 1- ko‘rinishidan foydalanamiz.

Ikkita manfiy bo‘lmagan

$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n....$,

$b=\beta_0,\beta_1\beta_2..\beta_n....$

haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Agar $\forall n\geq 0$ da $\alpha_n=\beta_n$, ya’ni $\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,...,\alpha_n=\beta_n,...$

bo‘lsa, a va b sonlar teng deyiladi va $a=b$ kabi yoziladi.

4-ta’rif. Agar $\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,...,\alpha_n=\beta_n,...$

tengliklarning hech bo‘lmaganda bittasi bajarilmasa va birinchi bajarilmagan tenglik $n=k$ da sodir bo‘lsa, u holda: $\alpha_k>\beta_k$ bo‘lganda a soni b sonidan katta deyiladi va $a>b$ kabi belgilanadi. $\alpha_k<\beta_k$ bo‘lganda a soni b sonidan kichik deyiladi va $a<b$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, to‘g‘ri chiziq, unda tayin olingan O nuqta (koordinata boshi) va o‘lchov birligi berilgan bo‘lsin. Haqiqiy sonlar to‘plami R bilan to‘g‘ri chiziq nuqtalari orasidagi bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin: O nuqtadan o‘ngda joylashgan P nuqtaga OP kesmaning uzunligiga teng x soni mos qo‘yiladi (x son P nuqtaning koordinatasi deyiladi); O nuqtadan chapda joylashgan Q nuqtaga QO kesmaning uzunligiga teng x sonining minus ishorasi bilan olingan $-x$ soni mos qo‘yiladi; O nuqtaga nol soni mos qo‘yiladi.

Arximed aksiomasi. Ixtiyoriy chekli haqiqiy a soni uchun shunday natural m soni topiladiki, $m>a$ bo‘ladi.

Aytaylik, $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n...>0$,

bo‘lsin. $m=\alpha_0+1,\ m\in N$ deb olinsa, unda 3-ta’rifga binoan $a<m$ bo‘ladi.

Kurs davomida tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to‘plamlarini keltiramiz.

Aytaylik, $a\in R, b\in R, a<b$ bo‘lsin:

$[a,b]=\{x\in R\,|\,a\leq x\leq b\}$ – segment deyiladi,

$(a,b)=\{x\in R\,|\,a<x<b\}$ – interval deyiladi,

$[a,b)=\{x\in R\,|\,a\leq x<b\}$ – yarim interval deyiladi,

$(a,b]=\{x\in R\,|\,a<x\leq b\}$ – yarim interval. deyiladi.

Bunda a va b sonlar $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ larning chegaralari deyiladi.

SHuningdek,

$[a,+\infty)=\{x\in R\,|\,x\geq a\}$,

$(-\infty,a)=\{x\in R\,|\,x<a\}$,

$(-\infty,\infty)=R$

deb qaraymiz.

Faraz qilaylik, a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, $a < b$ bo‘lsin. U holda $(a,b) \neq \varnothing$ bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2..\alpha_n... \geq 0$ $b = \beta_0, \beta_1\beta_2..\beta_n....$

bo‘lib, $m \geq 0$ uchun $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ..\alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$ va $\alpha_m < \beta_m$

bo‘lsin. Agar k natural son m dan katta sonlar ichida eng kichigi bo‘lsa, $(\alpha_k < 9)$ unda $r = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2..\alpha_m\alpha_{m+1}..(\alpha_k + 1)$ ratsional son uchun $a < r < b$ bo‘ladi. Demak, $(a,b) \neq \varnothing$.

Haqiqiy sonlar nazariyasi asosan ikki xil usul bilan quriladi: konstruktiv usul, aksiomatik usul.

Konstruktiv usul. Haqiqiy sonning konstruktiv nazariyalarida, odatda, ratsional sonlar nazariyasi ma’lum deb qaraladi va irratsional sonlarni qurish yoki uni hisoblashning yo’llari ko’rsatiladi. Haqiqiy sonlarning Kantor, Dedekind, Veyershtrass tomonidan kashf qilingan nazariyalari konstruktiv usul bo’lib, bunda natural sonlar yordamida birdaniga-ratsional sonlar to’plamini qurmasdan haqiqiy sonlar to’plamini qurish yo’li ko’rsatilgan.

Aksiomatik usul. Haqiqiy sonlar nazariyasini aksiomatik qurish jarayonini natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishdan boshlash mumkin. Bu jarayon sxematik ravishda quyidagicha bo’ladi.

Biror bo’sh bo’lmagan N to’plam olinib, bu to’plam elementlari orasidagi munosabatlar, amallar, amallar bo’ysunadigan qonunlar, bu amal va munosabatlarning bog’lanishi aksiomalar sistemasi orqali beriladi va N to’plam natural sonlar to’plami, uning elementlari esa natural sonlar deb e’lon qilinadi.

Natural sonlar to’plami N ni “asos” qilib olib so’ng N ni Z gacha, Z ni Q gacha, Q ni barcha haqiqiy sonlar to’plami R gacha kengaytiriladi, bunday kengaytirishlarning zarurligi asoslanadi. Har bir kengaytirish ma’lum bir aksiomalar sistemasi bilan ifodalanadi. Kengaytirish shunday bajariladiki, biror to’plamda (masalan Q da) bajariladigan amallar shu to’plamni kengaytirish natijasida hosil bo’lgan to’plamda (bizning holda R da) ham bajariladi va natija avvalgi to’plamdagi natijaga teng bo’ladi hamda avvalgi to’plamda

(Q da) umuman aytganda bajarilmaydigan amal (masalan ildiz chiqarish) kengaytirilgan to’plamda bajariladigan bo’ladi. Shu bilan birga to’plam bir necha xil usulda kengaytirilgan bo’lsa, bu kengaytmalar izomorf bo’lishi kerak. Bunday ketma-ket kengaytirishlardan foydalanmasdan haqiqiy sonlar to’plamini birdaniga kengaytirish ham mumkin. Buning uchun bo’sh bo’lmagan biror R to’plam olib, bu to’plam elementlari orasidagi munosabatlar, amallar, bu amallar bo’ysunadigan qonun – qoidalar, amal va munosabatlar orasidagi bog’lanishlar aksiomalar sistemasi orqali beriladi. R to’plam haqiqiy sonlar to’plamini, uning elementlari esa haqiqiy sonlar deb e’lon qilinadi va bu aksiomalar sistemasini qanoatlantiruvchi tayin bir matematik obyekt (masalan, haqiqiy sonlar to'plamining geometrik tasviri bo'lgan sonlar o'qi) haqiqatdan ham mavjudligi ko'rsatiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Soatov Y.U. «Oliy matematika», I jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y.

2. Tao T. Analysis 1. Hindustan Book Agency, India, 2014

3. Madraximov X.S., Ganiev A.G., Muminov N.S. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y.

4. Fixtengols G. M. Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t. M. «FIZMATLIT», 2001.

5. T. Yokubov «Matematik logika elementlari», Toshkent, O'qituvchi, 1983y.

6. Rajabov F., Nurmetova. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1990 y.

7. Piskunov N.S. «Differensial va integral hisob», 1-tom, Toshkent, O'qituvchi, 1972 y.

8. Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma'ruzalar, I q. T. "Voris-nashriyot", 2010.