7 – TOM 1 – SON / 2024 - YIL / 15 - YANVAR

FUNKSIYANING LIMITI VA UNING ASOSIY XOSSALARI

Abduraxmonova Moxinur Xamidullayevna
TIQXMMI, Milliy tadqiqot universiteti
"International Hause Tashkent" akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada limit tushunchasining paydo bo'lishi, funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari haqida malumot berilgan. Funksiyalarning limitini topishga doir bir necha misollar keltirilgan.*

Kalit so'zlar: *limit, funksiya, matematika, xossa, ta'rif, qiymat, aniqmaslik, ajoyib limit, miqdor, cheksiz.*

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Абдурахмонова Мохинур Хамидуллаевна
TIQXMMI, Национальный исследовательский университет
Учитель математики академического лицея "International Hause Tashkent"

Аннотация: *В этой статье дается обзор появления понятия предела, предела функции и ее основных свойств. Приведем несколько примеров нахождения предела функций.*

Ключевые слова: *предел, функция, математика, свойство, определение, значение, неопределенность, отличный предел, количество, бесконечность.*

LIMIT OF THE FUNCTION AND ITS BASIC PROPERTIES

Abduraxmonova Moxinur Xamidullayevna
TIQXMMI, National Research University
Mathematics teacher of "International Hause Tashkent" academic lyceum

Annotation: *this article describes the emergence of the concept of limit, the limit of a function, and its fundamental properties. There are several examples of finding the limit of functions.*

Key words: *limit, function, mathematics, property, definition, value, ambiguity, great limit, quantity, infinite.*

Limit (lotincha: Limes – chek, chegara) tushunchasi matematika fanining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bunda limit tushunchasi o'zgarish va cheksiz yaqinlashish jarayoniga bog'liq. Limitning aniq matematik ta'rifi 19-asr boshlarida shakllandi. Natijada matematikada yangi tushuncha — limitlar tushunchasi paydo bo‘ldi. Limitlarning tatbiqi va rivoji differensial hisob va integral hisobning yaratilishiga, matematik analizning vujudga kelishiga olib keldi.

Limitlar nazariyasida limitlarning xossalari tekshiriladi, o‘zgaruvchi miqdor limitlarning mavjud bo‘lishi shartlari o‘rganiladi, bir necha sodda o‘zgaruvchi miqdorlarning limitlarini bilgan holda murakkab funksiyalar limitlarini hisoblashga imkon beradigan qoidalar topiladi. Limitlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri cheksiz kichik — limiti nolga teng bo‘lgan o‘zgaruvchi miqdor tushunchasi hisoblanadi. Limitlar nazariyasining yaratilishiga I. Nyuton, J. Dalamber, L. Eyler, O. Koshi, K. Veyershtrass, Bolsanolar katta hissa qo‘shishgan.

Limit tushunchasining turli-tuman shakllarda uchrab turishi, bu shakllarning hammasini bitta ko’rinishga keltirish masalasini qo’yadi. Bu maqsadga erishishning ikki yo’li bor: yo (masalan Shatunovskiy va Mur-Smit izidan borib) **«Tartiblangan o’zgaruvchi»** limitining eng umumiy ta’rifini berish yoki G.M.Fixtengolts usuli – har qanday limitni eng sodda holda – nomerlangan qiymatlar ketma-ketligini qabul qiladigan o’zgaruvchining limitiga keltirish kerak. Birinchi yo’l yangi o’rganuvchilarga qiyin, shu sababli biz ikkinchi yo’lni tanladik. Limitning har bir yangi shakliga ta’rifni avvalo ketma-ketliklar limiti yordamida berib, nihoyat uning ketidan **«є - δ tilida»** ifodaladik. **«lim»** belgi qisqartirilgan lotincha **«Limes»** so’zining birinchi uchta harifidir, u o’zbek tilida marra, chegara (limit) ma’nosini anglatadi.

Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo’lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo’lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{ёки} \quad x \to a \quad \partial a \quad f(x) \to A \qquad (1)$$

Funksiya limitining ta’rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo’lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo’ladi.

2-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo’lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo’lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o’zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o'ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) \tag{3}$$

bilan begilanadi.

3-ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \tag{4}$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalarini keltirib o'tamiz:

1) *yig'indining limiti*. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \tag{5}$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko'paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \tag{6}$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right] = c\lim_{x\to a} f_1(x) \tag{7}$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti noldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni

$\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \tag{8}$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e, \qquad e=2{,}71828\ldots \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va** ***ikkinchi*** **ajoyib** limitlar deyiladi.

Aniqmasliklar va ularni ochish

Aniqmasliklar. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da **(0/0) ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da (∞/∞) ***ko'rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o'xshash $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)-\varphi(x)], \quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] \quad ва \quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo'ladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning

$x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

natijaga ega bo'lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o'zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. SHunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x=5/6.$$

2-misol.

$$\lim_{x\to3}(2x^2-5x+4)=7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2-5x+4)$larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x\to3$ bo'lganligi uchun $x-3=\alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x=3+\alpha$ ni $(2x^2-5x+4)-7$ ayirmaga qo'yib,

$$2(3+\alpha)^2-5(3+\alpha)+4-7=2(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7=$$

$$=18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7=2\alpha^2+7\alpha$$

natijaga ega bo'lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo'ladi. SHunday qilib, $\lim_{x\to3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$funksiya qiymatlari jadvali bilan ko'rsataylik. Ma'lumki $x\to3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to7$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya'ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to'g'ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo'lib, $x\to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo'lib, $x\to 3$ holni o'quvchiga mustaqil ko'rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$
$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$
$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to 1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo'ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to 1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right]=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg 10+3=1+3=4$$

5-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinish-dagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)}=\frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)}=5/3$$

bыladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo'lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya'ni x^2 ga bo'lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2$$

bo'ladi. Bunda $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo'ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o'tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko'paytiramiz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} =$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} =-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x} =$$

$$= -\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2} =-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo'ladi. SHuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da limitga o'tsak, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo'ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} =\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

SHundayqilib, $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = e^3$.

11-misol. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo'lib, $(\infty-\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x\to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo'ladi. SHunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to+\infty$ da $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x\to\infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

bunda $x\to+\infty$ da $3/x\to 0$ bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T. A. Azlarov, X. Mansurov. "Matematik analiz asoslari", 1-qism. "O'qituvchi" Toshkent 1986.

2. B. P. Demidovich, "Сборник задач и упражненый по математическому анализу. Наука 1977.

3. G. M. Fixtengols, "Matematik analiz asoslari" I tom. "O'qituvchi" Toshkent 1970.

4. A. Sa'dullayev, "Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami" 1-qism. "O'zbekiston" 1993.

5. Azlarov T., Mansurov X. «Matematik analiz», I qism, Toshkent, O'qituvchi, 1994 y.

6. Soatov Y.U. «Oliy matematika», I, II jildlar, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y.

7. Nazarov R.N., Toshpolatov B.T., Dusumbetov A.D. «Algebra va sonlar nazariyasi», I qism, Toshkent, O'qituvchi, 1993 y.

8. https://packpdf.com

9. https://wikipedia.org

10. https://matematika.uz