УДК 518.0

# О ПРИБЛИЖЁНИИ Т-НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Имомов Адаш**
*Наманганский государственный университет, доцент кафедры Информатика*
*Gmail: adashimomov50@gmail.com*

**Аннотация**: *Рассматриваются три основные вариационные методы Т-нормального решения теории некорректных задач и их взаимосвязь. Признаком решения является интегрально-дифференциальное уравнение Эйлера. При практическом решении некорректной задачи уравнение Эйлера дискредитируется и получаются СЛАУ. Даны оценки приближённых решений и методы выбора параметра регуляризации.*

**Ключевые слова**: *некорректная задача, вариационные методы, их взаимосвязь, Т-нормальное решение, регуляризация по Тихонову, сходимость регулярных решений.*

# ON APPROXIMATION OF T- NORMAL SOLUTIONS OF OPERATOR EQUATION

**Imomov Адаш**
*Namangan state university, Lecturer of Computer science department*
*Gmail: adashimomov50@gmail.com*

**Annotation**: In the article, we considered the links between the three variation methods of incorrect problems. The link effectible with parametrical variation method of Tichonov with equation of Euler. In concrete problems, the Euler's equation is integro-differential equation. The Euler's equation are discrete and there is solved. We give estimate of numerical solutions and the methods of chose of regularities parameters.

**Ключевые слова**: the incorrect problems, three variations methods, the link between methods, the T- normal solution, the regular methods of Tichonov and their convergence.

# ОПЕРАТОР ТЕНГЛАМАЛАР: Т-НОРМАЛ ЕЧИМЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ТОПИШ

**Имомов Адаш**
*ф.-м.ф.н., Наманган давлат университети, Информатика кафедраси*
*Gmail: adashimomov50@gmail.com*

**Аннотация**: *Мақолада нокоррект масалалар назариясининг уч вариацион усули, улар орасидаги боғланишлар қаралган. Боғланиш Тихоновнинг параметрли вариацион* *усули ва экстремумнинг Эйлер тенгламаси билан берилади. Эйлер тенгламаси интегро- дифференциал тенгламадир. Бу тенглама дискретлаш жараёнида чизиқли тенгламалар системасига келтирилади. Мақолада нокоррект 1-тур интеграл тенглама ечиб кўрилган. Усулнинг параметри танлаб олиниб тақрибий ечим аниқ бўлгунгача давом эттирилган.*

**Калит сўзлар**: *нокоррект масала, уч вариацион усул, улар оросида богланиш, Т-нормал ечим, нокоррект масалани регулярлаштириш, регуляр ечимларнинг яқинлашиши.*

## 1. Введение. О корректно поставленных задачах.

Одномерное нелинейное интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции имеет вид:

$$\int_a^b K(x,y,u(y))dy = F(x,u), a \le x \le b, \qquad (1.1)$$

где ядро $K(x,y,u)$ и правая часть $F(x,u)$-заданные функции. Обобщением (1.1) является операторное уравнение первого рода:

$$Au = f, u \in U, f \in F, \qquad (1.2)$$

где $A:U \to F$ -некоторый произвольный оператор, $\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_F$ -нормы в **U**, **F** [1,2].

Не всегда можно точно решить уравнения (1.1) -(1.3). Поэтому, часто их решают приближённо. Разработано много приближённых методов решения операторных уравнений и соответствующие программы [1-12].

Определение 1 (Адамар, 1902 г.). Задача $Au = f, u \in U, f \in F$ считается поставленной корректно в паре множеств (**U**, **F**), если справедливы следующие условия корректности:

1) условие существования решения: для каждой правой части $f \in F$ существует решение $Au = f, u \in U$ ;если **A**-линейный обратимый оператор будем писать: $u = A^{-1}f$ ;

2) условие единственности решения: решение $u: A\cancel{u}$ для каждого $f \in F$ единственно;

3) условие непрерывной зависимости решения от правой части:

$$\|u_1 - u_2\| \le C\|f_1 - f_2\|, Au_i = f_i, i = 1,2. \qquad (1.3)$$

Задачи, в которых не выполнено какое-то условие корректности называются некорректно поставленными. Приведём примеры задач:

1) система линейных уравнений с равным или близким к нулю определителем, где нарушаются все условия корректности;

2) задача интерполяции, где нарушается условие единственности;

3) задач дифференцирования, где нарушается условие устойчивости;

4) задача Коши для эллиптического дифференциального уравнения, где нарушается условие устойчивости.

5) интегральные уравнения первого рода, где нарушаются все условия корректности.

Для приближённого решения операторного уравнения (1.2)

предложены следующие методы:

1. Метод Лаврентьева М.А[5] сведения операторного уравнения

первого рода к операторному уравнению второго рода:

$$A_h u+\alpha u = f_\delta, u_\Delta = (A_h+\alpha E)^{-1} f_\delta \to u_0, \Delta=(h,\delta)\to 0, Au_0 = f\ , \quad (1.5)$$

$$A^* A_h u+\alpha u = A^* f_\delta, u_\Delta = (A^* A_h+\alpha E)^{-1} A^* f_\delta \to u_0, \Delta=(h,\delta)\to 0, Au_0 = f\ . \quad (1.6)$$

2. Метод квазирешений Иванова В.К. [6]:

$$\inf\{\|A_h u - f_\delta\| : u\in M \in U\}, u_\Delta = (A_h^* A_h)^{-1} A_h^* f_\delta \to u_0, A^* A u_0 = A^* f\ . \qquad (1.7)$$

3. Метод невязки Филлипса Д.Л. [7]:

$$\inf\{\|Tu\|^q : u\in \Omega_\Delta = \{u\in U : \|A_h u - f_\delta\|^p \le \varepsilon^p(\Delta)\to 0\}\}. \quad (1.8)$$

4.Метод регуляризации Тихонова А.Н. [8]:

$$\inf\{\|A_h u - f_\delta\|^p + \alpha\|Tu\|^q : u\in U\}, u_\Delta = R_{h,\delta} f_\delta, Au_0 = f\}, (K\|u\|\le\|Tu\|)\cap(K\|u\|^\kappa \le \|Tu\|^\kappa + \|Au\|^\kappa\}$$
(1.9)

**2. Обзор литературы**.

Долгое время считалось, что некорректные задачи не имеют практического смысла. Однако, начиная с первой пионерской работы акад. Тихонова А.Н. в 1963 году начали появляться практические задачи, для которых некоторые условия корректности не выполняются.

Академик А.Н.Тихонов [8], академик М.М. Лаврентьев [5], академик Иванов В.К. [6]. и их ученики доказали, что некорректные задачи также имеют практический смысл и для некоректно поставленных задач создали изящную теорию и практические прикладные приближённые методы. Такие приближённые метоы стали называтся регулярными приближёнными методами [4-10]. Кроме того, академик А.Н. Тихонов и его ученики создали теорию и практику нормального (сплайнового решения) решения некорректных задач [4-10]. Нормальное решение некорректной задачи — это решение задачи с некоторым функциональным минимальным значением среды всех решений в полунорме. При этом нахождение нормального решения оказалось устойчивой задачей. Были найдены приближённые методы определения нормальных решений. Особо следует отметить, работы по методам штрафных функций, которые используются как для задач оптимизации и приближённого решения операторных уравнений, где метод называется по французски как les methodes de regularization et de penalization [4,с.237].

Методы Иванова, Филлипса, Тихонова взаимосвязаны через метод Тихонова и уравнение Эйлера минимального элемента. Метод Лаврентьева даёт те же регуляризованные уравнения, но без связи вариационных постановок приближённых задач. Эти методы появились почти одинаковое время (1956-1962 г. г.), в четырёх местах земного шара, к чему можно только удивляться. Следует отметить, что В.А. Морозов [10, с.84-89] установил связь методов Лаврентьева и Тихонова рассматривая квадратный корень от положительного, самосопряженного оператора.

Приведём принцип Лагранжа для гладких задач, сведения условной задачи экстремума, к безусловной задаче.

Теорема (принцип Лагранжа) [9, с. 53]. Пусть в задаче

$f_0(x) \to \inf; F(x)=0,\ f_i(x) \le 0, i=1..m; F: X \to Y,\ f_i: X \to R,$

X, Y-банаховы пространства, отображения $f_i, F-$непрерывно-дифференцируемые функции, образ $F'(x_0)x, x \in X$ замкнут. Если точка $x_0$-локального минимума то, для него выполнен принцип Лагранжа: существуют одновременно неравные нулю множители $\lambda_i, i=0..m, y^* \in Y^*$, такие, что для удлинённой функции Лагранжа $L=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ справедливы условия:

1) $\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i'(x_0) + F'(x_0)y^* = 0;$ 2) $\lambda_i \ge 0, i=0..m;$ 3) $\lambda_i f_i(x_0 0 = 0, i=0..m$. (нежесткость).

## 3. Методы исследования

**3.1. Абсолютные и относительные ошибки.** Подход Воеводина [1, с.302].

Пусть $Ax=z, \tilde{A}\tilde{x}=\tilde{z},$ точное и приближённое уравнения. Числа $\|\varepsilon_x\|=\|x-\tilde{x}\|, \|\varepsilon_A\|=\|A-\tilde{A}\|, \|\varepsilon_z\|=\|z-\tilde{z}\|$ называются абсолютными погрешностями приближённых величин: $\tilde{x}, \tilde{A}, \tilde{z}$. Числа $\delta_x=\|x-\tilde{x}\|/\|x\|, \delta_A=\|A-\tilde{A}\|/\|A\|, \delta_z=\|z-\tilde{z}\|/\|z\|$ называются относительными погрешностями приближённых величин: $\tilde{x}, \tilde{A}, \tilde{z}$.

Пусть $A, \tilde{A} \in L(X,Y)$ и $A^{-1} \in L(Y,X)$, $\tilde{A}=A+\varepsilon_A$.Оператор $\varepsilon_A$ называется возмущением оператора А, а $\tilde{A}=A+\varepsilon_A$-возмущённым оператором.

**Лемма** 1. Возмущённый оператор $E+A^{-1}\varepsilon_A$ при

$$\|\varepsilon_A\| < \|A^{-1}\|^{-1} \qquad (3.1)$$

будет невырожденным.

Действительно, пусть $\lambda$-собственное значение оператора А: $Ax=\lambda x, x \ne 0$. Тогда $1+\lambda$ есть собственное значение оператора $E+A$. Так как $|\lambda| \le \|A\|$,то при условии $\|A\|<1$ оператор $E+A$ будет невырожденным, так как все собственные значения оператора $E+A$ отличны от нуля. Поэтому оператор $E+A^{-1}\varepsilon_A$ при выполнении условия (3.1) будет невырожденным так как $\|A^{-1}\varepsilon_A\| < \|A^{-1}\| * \|\varepsilon_A\| < 1$.

Выясним при каких условиях на возмущение $\varepsilon_A$ оператор $\tilde{A}=A+\varepsilon_A$ будет невырожденным. Имеем $A+\varepsilon_A = A(E+A^{-1}\varepsilon_A)$. Это означает оператор $\tilde{A}=A+\varepsilon_A$ будет невырожденным, если не вырождено оператор $E+A^{-1}\varepsilon_A$. Это условие будет выполнятся если

$q=\|A^{-1}\varepsilon_A\|<1$, тем более при $\|A^{-1}\varepsilon_A\|\le\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|<1$ [1, с.140]. Следовательно, мы имеем:

$$(A+\varepsilon_A)^{-1}=A^{-1}(E+A^{-1}\varepsilon_A)^{-1}, q=\|A^{-1}\varepsilon_A\|<1,$$

$$\|A-(E+A)^{-1}\|\le\frac{\|A\|}{1-\|A\|}(a-\frac{1}{1-a}\le\frac{a-a^2-1}{1-a}=\frac{a}{1-a}-\frac{1+a^2}{1-a}\le\frac{a}{1-a},|a|<1).$$

**3.2. Точное задание данных** $\|A-\bar{A}\|=0,\|z-\bar{z}\|=0$ **[11,12].**

$\sigma=\arg\min_{x\in I_f}\|Tx\|_Y^2, I_f=\{x:Ax=f\},\sigma$-интерполяционный сплайн,

$\sigma_\alpha=\arg\min_{x\in X}M_\alpha[x,A,f], M_\alpha[x,A,f]=\alpha\|Tx\|_Y^2+\|Ax-f\|_Z^2, \sigma_\alpha$-сглаживающий сплайн.

$(A^*A+\alpha T^*T)\sigma_\alpha=A^*z$ -уравнение Эйлера минимального элемента: $(M_\alpha)'_x=0$.

$\sigma_\alpha=(A^*A+\alpha T^*T)^{-1}A^*z$ -вид решения уравнения Эйлера. Из определения интерполяционного и сглаживающего сплайна имеем:

$$M_\alpha[\sigma_\alpha,A,f]\le M_\alpha[\sigma,A,f].$$

$$\alpha\|T\sigma_\alpha\|_Y^2+\|A\sigma_\alpha-f\|_Z^2\le\alpha\|T\sigma\|_Y^2+\|A\sigma-f\|_Z^2=\alpha\|T\sigma\|_Y^2$$

Отсюда получаем два неравенства:

$$\alpha\|T\sigma_\alpha\|_Y^2\le\alpha\|T\sigma\|_Y^2\Rightarrow\|T\sigma_\alpha\|_Y^2\le\|T\sigma\|_Y^2,\|A\sigma_\alpha-f\|_Z^2\le\alpha\|T\sigma\|_Y^2.$$

**Лемма** 2. $\|A\sigma_\alpha-f\|_Z^2\le\alpha\|T\sigma\|_Y^2\to0,\alpha\to0\Rightarrow\exists\bar{x}_0:A\bar{x}_0=f$ .

$$\|A\sigma_\alpha\|\le=(\|A\sigma_\alpha-f\|+\|f\|)\le\{\sqrt{\alpha}\|T\sigma\|_Y+\|f\|\}$$

$$|\sigma_\alpha|^2=\|T\sigma_\alpha\|^2+\|A\sigma_\alpha\|^2\le\|T\sigma\|^2+\{\sqrt{\alpha}\|T\sigma\|_Y+\|f\|\}^2\le C^2.$$

Т.е. последовательность $\{\sigma_\alpha\}$-ограничена. Ограниченная последовательность гильбертовом пространстве слабо компактно, т.е. из этой последовательности можно выделить подпоследовательнось, которая сходиться к некоторому пределу $\bar{\sigma}$ при $\alpha\to0$. Линейные операторы слабо непрерывны и в неравенствах

$$\|T\bar{\sigma}_\alpha\|_Y^2\le\|T\sigma\|_Y^2,\|A\bar{\sigma}_\alpha-f\|_Z^2\le\alpha\|T\sigma\|_Y^2$$

переходим в предел при $\alpha\to0$ и имеем $\|A\bar{\sigma}-f\|_Z^2\le0,\|T\bar{\sigma}\|_Y^2\le\|T\sigma\|_Y^2\Rightarrow\bar{\sigma}=\sigma:A\bar{\sigma}=f$

В силу единственности интерполяционного сплайна имеем $\bar{\sigma}$ = ·.Тогда вся последовательность сходится к этому пределу.

**Лемма 3** [11,12]. $\|\sigma_\alpha-\sigma\|\le C_1\alpha$ **.**

Доказательство. Даём новое доказательство на основе признака сглаживающего сплайна: $L^*L\sigma_\alpha=(A^*A+\alpha T^*T)\sigma_\alpha=A^*z, L^*L=A^*A+\alpha T^*T$. Введём подпространство сплайнов в пространстве $S=S(T,A,X)=\{(Ts,Tx)=0,\forall x\in X\}$. Оператор непрерывно обратим по теорема Банаха. Учитывая $z = A\sigma$ имеем: $L^*L\sigma_\alpha = (A^*A + \alpha T^*T)\sigma_\alpha = A^*z \Rightarrow \alpha T^*T\sigma_\alpha = A^*z - A^*A\sigma_\alpha = A^*A\sigma - A^*A\sigma_\alpha = A^*A(\sigma - \sigma_\alpha)$.

т.е. $\alpha T^*T\sigma_\alpha = A^*A(\sigma-\sigma_\alpha) \Rightarrow \sigma - \sigma_\alpha = \alpha(A^*A_{|S})^{-1}T^*T\sigma_\alpha \Rightarrow \|\sigma-\sigma_\alpha\| = \alpha\left\|(A^*A_{|S})^{-1}T^*T\sigma_\alpha\right\|$.

**3.3. Неточное задание данных $\|A - \bar{A}\| \le \|\bar{\varepsilon}_A\|, \|z - \bar{z}\| \le \|\bar{\varepsilon}_z\|$.**

Число обусловленности линейного оператора. Единичный оператор E – невырожденный. Тогда для относительных погрешностей операторов $A, A^{-1}$ имеем:

$$\delta_A = \frac{\|\varepsilon_A\|}{\|A\|}, \delta_{A^{-1}} = \frac{\left\|(A+\varepsilon_A)^{-1} - A^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \qquad (3.2)$$

Теперь найдём:

$$(A+\varepsilon_A)^{-1} - A^{-1} = ((A+\varepsilon_A)^{-1}A - E)A^{-1} =$$
$$((A^{-1}(A+\varepsilon_A))^{-1} - E)A^{-1} = ((E + A^{-1}\varepsilon_A)^{-1} - E)A^{-1}.$$

Так как

$$\left\|(A+\varepsilon_A)^{-1} - A^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}\varepsilon_A\right\|\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \left\|A^{-1}\varepsilon_A\right\|} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|^2\|\varepsilon_A\|}{1 - \left\|A^{-1}\right\|\|\varepsilon_A\|} \qquad (3.3)$$

Теперь учитывая $\delta_A\|A\| = \|\varepsilon_A\|$ для $\delta_{A^{-1}}$ получаем оценку:

$$\delta_{A^{-1}} \le \frac{\nu(A)\delta_A}{1 - \nu(A)\delta_A}, \nu(A) = \left\|A^{-1}\right\|\|A\|. \qquad (3.4)$$

Величина $\nu(A)$ называется числом обусловленности оператора A. Если число обусловленности оператора мало, то мала относительная ошибка, напротив если оно велико относительная ошибка также велико и нет устойчивости решения операторного уравнения.

Число обусловленности всегда больше или равно единице:

$$E = A^{-1}A \Rightarrow 1 = \|E\| = \left\|A^{-1}A\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|A\| \Rightarrow \nu(A) \ge 1$$

**3.4. Оценка абсолютной и относительной погрешностей.**

Рассмотрим теперь точное и возмущенное уравнения

$$Ax = z, \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{z}, \tilde{A} = A + \varepsilon_A, \tilde{z} = z + \varepsilon_z.$$

Имеем

$$x = A^{-1}z, \tilde{x} = (A+\varepsilon_A)^{-1}(z+\varepsilon_z).$$

Отсюда находим

$$\tilde{x} - x = (A+\varepsilon_A)^{-1}(z+\varepsilon_z) - A^{-1}z =$$
$$((E + A^{-1}\varepsilon_A)^{-1} - E)A^{-1}z + (E + A^{-1}\varepsilon_A)^{-1}A^{-1}\varepsilon_z$$

Тогда имеем

$$\|\tilde{x} - x\| \le \left\|(E + A^{-1}\varepsilon_A)^{-1} - E\right\|\|x\| + \left\|(E + A^{-1}\varepsilon_A)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|\|\varepsilon_z\|.$$

Учитывая оценки [1, ф. (87.2 и 87.3], и неравенство $\|z\| \le \|A\|\|x\|$ находим

$$\|\tilde{x}-x\| \le \frac{\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|\|x\|}{1-\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|} + \frac{\|A^{-1}\|\|\varepsilon_z\|}{1-\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|\varepsilon_A\|/\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|\|A\|/\|A\|}\|x\| + \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|\varepsilon_z\|/\|z\|}{1-\|A^{-1}\|\|\varepsilon_A\|\|A\|/\|A\|}\|x\|$$

Учитывая определения $\delta_A\|A\| = \|\varepsilon_A\|,\ \delta_z\|z\| = \|\varepsilon_z\|$, $\delta_x\|x\| = \|\varepsilon_x\|$ получаем

$$\delta_x \le \frac{v(A)}{1-v(A)\delta_A}(\delta_A+\delta_z)\,. \qquad (3.5)$$

**3.5. Применение к сплайн функциям [11,12].** В [4-9,6,9] рассмотрен случай T=E, Ex=x. В [10] рассмотрено T-нормальное решение, но получены другие оценки. Используя равенства

$$(A^*A+\alpha T^*T)\sigma_\alpha = A^*z\,,\ (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)\sigma_\alpha = \bar{A}^*\bar{z}, \sigma_\alpha = x_\alpha, \sigma = x_0$$

$$\sigma_\alpha = (A^*A+\alpha T^*T)^{-1}A^*z\,, \bar{\sigma}_\alpha = (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}\bar{A}^*\bar{z}$$

преобразуем следующую разность: $(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)x_\alpha - (A^*A+\alpha T^*T)x_\alpha = \bar{A}^*\bar{z} - A^*z$.

Имеем:

$$(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)x_\alpha - (A^*A+\alpha T^*T)x_\alpha + \bar{A}^*\bar{A}x_\alpha - \bar{A}^*\bar{A}x_\alpha = \bar{A}^*\bar{z} - A^*z$$
$$(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)x\ \ - (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)x_\alpha + \bar{A}^*\bar{A}x_\alpha - A^*Ax_\alpha = \bar{A}^*\bar{z} - A^*z\,,$$

$$(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)(\bar{x}_\alpha - x_\alpha) = A^*Ax_\alpha - A^*z - \bar{A}^*\bar{A}x_\alpha + \bar{A}^*\bar{z}\,,$$

$$(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)(\bar{x}_\alpha - x_\alpha) = A^*(Ax_\alpha - z) - \bar{A}^*(\bar{A}x_\alpha - \bar{z})\,,$$

$$(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)(\bar{x}_\alpha - x_\alpha) = b = (A-\bar{A})^*(Ax_\alpha - z) - \bar{A}^*((\bar{A}-A)x_\alpha - (\bar{z}-z)) = u + A^*v\,,$$

$$b = u + A^*v, u = (A-\bar{A})^*(Ax_\alpha - z), v = -((\bar{A}-A)x_\alpha - (\bar{z}-z))\,.$$

Тогда получаем уравнение для разности

$$\bar{x}_\alpha - x_\alpha = (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}b = (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}u + (\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}A^*v\,.$$

Здесь переходим к неравенствам:

$$\|\bar{x}_\alpha - x_\alpha\| \le \|(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}\|\|u\| + \|(\bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T)^{-1}A^*\|\|v\|\,.$$

**Лемма** 4. Справедливы $\|u\| = \|\bar{\varepsilon}_A\|\|Ax_\alpha - z\| \le \sqrt{\alpha}\|\bar{\varepsilon}_A\|\|Tx_0\|_Y, \|v\| = \|\bar{\varepsilon}_A\|\|x_\alpha\| + \|\bar{\varepsilon}_z\|$.

**Лемма 5.** Справедливо неравенство**:** $B_\alpha = \bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T \Rightarrow \|B_\alpha^{-1}\| \le 1/\alpha\lambda_{\max}(T^*T)$

Сначала докажем неравенство Лаврентьева-Воеводина $\|(A^*A+\alpha E)^{-1}\|_2 \le \alpha^{-1}$ [1,с.302,2,6.с.63]. Пусть $\lambda(A)$-собственное значение оператора А. Ясно, что $\lambda(A^*A+\alpha E) \ge \alpha \Rightarrow \lambda((A^*A+\alpha E)^{-1}) \le \alpha^{-1}$. Для положительно определённого оператора спектральная норма совпадает с максимальным собственным значением, т.е. $\|(A^*A+\alpha E)^{-1}\|_2 \le \alpha^{-1}$. Тогда имеем:

$$\|B_\alpha\| = \|(A^*A+\alpha T^*T)^{-1}\|_2 = \|(A^*A+\alpha\|T^*T\|T^*T/\|T^*T\|)^{-1}\|_2 \le \alpha^{-1}\|T^*T)\|_2^{-1}$$

**Теорема 1**. Пусть $B_\alpha = \bar{A}^*\bar{A}+\alpha T^*T$. Тогда справедливо неравенство: $\|\bar{x}_\alpha - x_\alpha\| \le \|B_\alpha^{-1}\|\{\sqrt{\alpha}\|\bar{\varepsilon}_A\|(\|Tx_0\|_Y + \|x_\alpha\|) + \|\bar{\varepsilon}_z\|\}$.

Из этой теоремы вытекает:

Теорема 2. $\|\bar{x}_\alpha - x_0\| \le \|\bar{x}_\alpha - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_0\| \le C_1\alpha + \|B_\alpha^{-1}\|\{\sqrt{\alpha}\,\|\varepsilon_A\|(\|Tx_0\|_Y + \|x_\alpha\|) + \|\varepsilon_z\|\}$.

**3.6. Проблема выбора параметров сглаживания.**

$$\sigma^\rho = \arg\min_{x\in X} M^\rho[x,z],\ M^\rho[x,z] = \|Tx\|_Y^2 + \rho\|Ax - z\|_Z^2,\ (T\sigma^\rho, Tx) + \rho(A\sigma^\rho - z, Ax) = 0, \forall x \in X$$

$$\sigma_\alpha = \arg\min_{x\in X} M_\alpha[x,z],\ M_\alpha[x,z] = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \|Ax - z\|_Z^2,\ \alpha(T\sigma_\alpha, Tx) + \rho(A\sigma_\alpha - z, Ax) = 0, \forall x \in X$$

Введём скалярные вспомогательные функции**:**

$$\varphi(\rho) = \|A\sigma^\rho - z\|_Z,\ \gamma(\rho) = \|T\sigma^\rho\|_Y,\ \phi(\rho) = \gamma^2(\rho) + \rho\varphi^2(\rho),\ \sigma^\rho = \sigma_{1/\alpha},$$

$$\varphi(\alpha) = \|A\sigma_\alpha - z\|_Z,\ \gamma(\alpha) = \|T\sigma_\alpha\|_Y,\ \phi(\alpha) = \alpha\gamma^2(\alpha) + \varphi^2(\alpha),\ \sigma_\alpha = \sigma^{1/\rho}.$$

Введём скалярное произведение и операторы:

$$K = Y\times Z, x\in X, y\in Y, z\in Z, (k_1,k_2) = (y_1,y_2)_Y + \rho(z_1,z_2)_Z = \alpha(y_1,y_2)_Y + (z_1,z_2)_Z, \alpha = 1/\rho, R = A^*A$$

$$Q = T^*T, P = L^*L, L = [T,A], Lx = [Tx, Ax] = [y,z], \|Lx\|^2 = \|Tx\|_Y^2 + \rho\|Ax\|_Z^2, \|Lx\|^2 = \alpha\|Tx\|_Y^2 + \|Ax\|_Z^2$$

Операторы Q,P,R-самосопряженные: $Q^* = (T^*T)^* = T^*(T^*)^*, P^* = (L^*L)^* = L^*(L^*)^*$.

**Лемма** 6. Производные сглаживающего сплайна определяются уравнениями:

$$L^*L\sigma^\rho = \rho A^* z, L^*L(\sigma^\rho)' = A^*(z - A\sigma^\rho) = \rho^{-1}T^*T\sigma^\rho, L^*L(\sigma^\rho)'' = -2A^*A(\sigma^\rho)',$$

$$L^*L\sigma_\alpha = A^* z, L^*L\sigma'_\alpha = -T^*T\sigma_\alpha, L^*L\sigma''_\alpha = -2T^*T\sigma_\alpha.$$

**Лемма 7**. Все вспомогательные функции дважды непрерывно дифференцируемые. Кроме того, они обладают свойствами:

a) $\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = -\|L(\sigma^\rho)'\|^2 < 0; \varphi(\rho)\varphi''(\rho) \ge \rho^{-1}\|A(\sigma^\rho)'\| \ge 0$

b) $\gamma(\rho)\gamma'(\rho) = (T(\sigma^\rho)', T(\sigma^\rho)') = \rho^{-1}\|L(\sigma^\rho)'_\alpha\|^2 \ge 0, \gamma(\rho)\gamma''(\rho) \ge 2\|T(\sigma^\rho)'\|_Y^2 \ge 0$

c) $\phi'(\rho) = \varphi^2(\rho) \ge 0, \phi''(\rho) = 2\varphi\varphi' = -\|L\sigma^{\rho'}\|^2 \le 0;$ выпукла вверх.

| n | $f(\rho)$ | $f'(\rho)$ | $f''(\rho)$ | $\rho_{k+1} = \rho_k - f(\rho_k)[f'(\rho_k)]^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varphi(\rho) = \|A\sigma^\rho - z\|$ | $\varphi\varphi' = -\|L\sigma^{\rho'}\|^2$ | $\varphi\varphi'' \ge 2\rho^{-1}\|A\sigma^{\rho'}\|^2$ | $\alpha_0 = b, f'f'' > 0$ |
| 2 | $\gamma(\rho) = \|T\sigma^\rho\|$ | $\gamma\gamma' = \rho\|L\sigma^{\rho'}\|^2$ | $\gamma\gamma'' \ge -2\rho\|A\sigma^{\rho'}\|^2$ | $\alpha_0 = a, f'f'' < 0$ |
| 3 | $\phi(\rho) = \gamma^2(\rho) + \rho\varphi^2(\rho)$ | $\phi' = \varphi^2(\rho) = \|A\sigma^\rho - z\|^2$ | $\phi'' = 2\varphi\varphi' = -2\rho\|A\sigma^\rho\|^2$ | $\alpha_0 = a, f'f'' < 0$ |

**Лемма 8** . Все вспомогательные функции дважды непрерывно дифференцируемые. Кроме того, они обладают свойствами:

a) $\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha = \|L\sigma'_\alpha\|^2 > 0, \varphi(\alpha)\varphi''(\alpha = (A\sigma''_\alpha, A\sigma_\alpha - z) = 2\alpha\|T\sigma'_\alpha\|^2 \ge 0$,

b) $\gamma(\alpha)\gamma'(\alpha) = (T\sigma'_\alpha, T\sigma_\alpha) = -\|L\sigma'_\alpha\|^2 \le 0, \gamma(\alpha)\gamma''(\alpha) \ge (T\sigma''_\alpha, T\sigma_\alpha) = 2\|T\sigma'_\alpha\|_Y^2 > 0$,

c) $\phi'(\alpha) = \gamma^2(\alpha) \ge 0, \phi''(\alpha) = (T\sigma'_\alpha, T\sigma_\alpha) = -\|L\sigma'_\alpha\|^2 \le 0;$ выпукла вверх.

Всю информацию о функциях расположим в таблицу:

| n | $f(\alpha)$ | $f'(\alpha)$ | $f''(\alpha)$ | $\alpha_{k+1} =$ $\alpha_k - f(\alpha_k)[f'(\alpha_k)]^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varphi(\alpha) = \lVert A\sigma_\alpha - z\rVert$ | $\varphi\varphi' = \lVert L\sigma'_\alpha\rVert^2$ | $\varphi\varphi'' \ge 2\alpha\lVert T\sigma'_\alpha\rVert^2$ | $\alpha_0 = b, f'f'' > 0$ |
| 2 | $\gamma(\alpha) = \lVert T\sigma_\alpha\rVert$ | $\gamma\gamma' = -\lVert L\sigma'_\alpha\rVert^2$ | $\gamma\gamma'' \ge \lVert T\sigma'_\alpha\rVert^2$ | $\alpha_0 = a, f'f'' < 0$ |
| 3 | $\phi(\alpha) = \alpha\gamma^2(\alpha) +$ $\varphi^2(\alpha)$ | $\phi' = \gamma^2$ | $\phi'' = \gamma\gamma'' = -\lVert L\sigma'_\alpha\rVert^2$ | $\alpha_0 = a, f'f'' < 0$ |

Доказательство. a). Имеем:

$$\varphi^2(\rho) = (A\sigma^\rho - z, A\sigma^\rho - z) \Rightarrow \varphi(\rho)\varphi'(\rho) = (A(\sigma^\rho)', A\sigma^\rho - z) = ((\sigma^\rho)', A^*(A\sigma^\rho - z)) =$$
$$((\sigma^\rho)', -\rho^{-1}T^*T\sigma^\rho) = -\rho^{-1}((\sigma^\rho)', T^*T\sigma^\rho) = -\rho^{-1}(T^*(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho)$$

$$\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = -\rho^{-1}(T^*(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho).$$

Согласно лемме1 имеем: $L^*L(\sigma^\rho)' = T^*T\sigma^\rho / \rho$. Умножая последнее равенство $(\sigma^\rho)'$ получаем: $\lVert L(\sigma^\rho)'\rVert^2 = \rho^{-1}(T(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho)$. Тогда имеем:

$$\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = -\rho^{-1}(T^*(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho) = -\lVert L(\sigma^\rho)'\rVert^2 < 0 .$$

Теперь из признака сглаживающего сплайна получаем:

$$L^*L(\sigma^\rho)'' = -2A^*A(\sigma^\rho)' \Rightarrow L^*L(\sigma^\rho)^{(n)} = -nA^*A(\sigma^\rho)^{(n-1)}, n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно также

$$\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = (A(\sigma^\rho)', A\sigma^\rho - z) \le \lVert A(\sigma^\rho)'\rVert \lVert A\sigma^\rho - z\rVert \Rightarrow \varphi'(\rho) \le \lVert A(\sigma^\rho)'\rVert ,$$

$$[\varphi'(\rho)]^2 + \varphi(\rho)\varphi''(\rho) = (A(\sigma^\rho)'', A\sigma^\rho - z) + \lVert A(\sigma^\rho)'\rVert^2 .$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\rho)\varphi''(\rho) \ge (A(\sigma^\rho)'', A\sigma^\rho - z) = (\sigma^{\rho''}, A^*(A\sigma_\alpha - z)) = (\sigma^{\rho''}, -T^*T\sigma^\rho / \rho) = -\rho(\sigma^{\rho''}, T^*T\sigma^\rho) =$$
$$-\rho^{-1}(\sigma^{\rho''}, -T^*T\sigma^\rho) = -\rho^{-1}(\sigma^{\rho''}, L^*L\sigma^\rho) = -\rho^{-1}(-2A^*A\sigma^{\rho'}{}_\alpha, \sigma^{\rho'}) = 2/\rho\lVert A\sigma^{\rho'}\rVert^2 .$$

Откуда следует $\varphi''(\rho) > 0$, т.е. функция невязки выпукла вниз на $(0, \infty)$.

b). Рассмотрим теперь функцию $\gamma(\rho) = \lVert T\sigma^\rho\rVert_Y$ .Приведём формулы, откуда следует утверждение леммы:

$$\gamma(\rho) = \lVert T\sigma^\rho\rVert_Y, \gamma^2(\rho) = (T\sigma^\rho, T\sigma^\rho)_Y, \gamma(\rho)\gamma'(\rho) = (T(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho)_Y = \rho\lVert L(\sigma^\rho)'\rVert^2 \ge 0 ,$$

$$[\gamma(\rho)\gamma'(\rho)]' = [\gamma'(\rho)]^2 + \gamma(\rho)\gamma''(\rho) = (T(\sigma^\rho)'', T(\sigma^\rho)) + \lVert T\sigma^\rho\rVert^2 ,$$

$$\gamma(\rho)\gamma'(\rho) = (T(\sigma^\rho)', T\sigma^\rho)_Y \le \lVert T(\sigma^\rho)'\rVert_Y \lVert T\sigma^\rho\rVert_Y \Rightarrow \gamma'(\rho) \le \lVert T(\sigma^\rho)'\rVert_Y ,$$

$$\gamma(\rho)\gamma''(\rho) \ge (T(\sigma^\rho)'', T(\sigma^\rho)) = -2\rho\lVert A(\sigma^\rho)'\rVert_Y^2 \ge 0$$

Здесь самое последнее равенство доказывается так:

c). $\phi(\rho) = \gamma^2(\rho) + \rho\varphi^2(\rho)$. Имеем:

$$\phi'(\rho) = 2[\gamma(\rho)\gamma'(\rho) + \varphi(\rho)\varphi'(\rho)] + \varphi^2(\rho) =$$
$$2[(T\sigma^\rho, T(\sigma^\rho)') + \rho(A\sigma^\rho - z, A(\sigma^\rho)')] + \varphi^2(\rho) = \varphi^2(\rho) > 0,$$
$$\phi''(\rho) = 2\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = 2/\rho\left\|A(\sigma^\rho)'\right\|^2 \geq 0.$$

Приведём одну теорему сходимости метода Ньютона:

**Теорема 3.** [3, теоремы 3, 4, с. 204]. Пусть дано уравнение $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), k = 0,1,\ldots.$. Рассматривается метод Ньютона его решения:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), k = 0,1,\ldots; x \in [a,b], x_0 = a \forall b.$$

Если $f'(x)f''(x) > 0$ необходимо брать $x_0 = b$ или же, если $f'(x)f''(x) < 0$ нужно брать $x_0 = a$. Тогда сходимость последовательности метода Ньютона будет односторонняя.

**3.7.Подход Треногина** [2,с.238-240]. Рассмотрим ситуацию:

$$Ax = z, \bar{A}\bar{x} = \bar{z}, \|\bar{z} - z\| \leq \delta, \|\bar{A} - A\| \leq \varepsilon.$$

Тогда справедливы утверждения:

**Лемма** 7. [2,с.239]. Справедливо неравенство:

$$0 \leq \varepsilon\left\|A^{-1}\right\| \leq q \Rightarrow \left\|(\bar{A} - A)A^{-1}\right\| \leq \left\|\bar{A} - A\right\|\left\|A^{-1}\right\| \leq q^{-1}.$$

**Теорема 4.** [2,с.141]. Пусть $A, B \in L(X,Y), A^{-1} \in L(Y,X)$ и $q = \left\|(B - A)A^{-1}\right\| < 1$.Тогда $B^{-1} \in L(Y,X)$ и справедливы оценки:

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|/(1-q), \left\|B^{-1} - A^{-1}\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|q/(1-q)$$

**Лемма** 8. [2,с.239]. Справедливы неравенства:

$$\left\|\bar{A}^{-1}\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|/(1-q), \left\|\bar{A}^{-1} - A^{-1}\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|^2 \varepsilon/(1-q).$$

**Теорема 3**. [2, с.239]. Для абсолютной ошибки справедливо :

$$\|\bar{x} - x\| = \left\|\bar{A}^{-1}\bar{z} - A^{-1}z\right\| = \left\|\bar{A}^{-1}(\bar{z} - z) + (\bar{A}^{-1} - A^{-1})z\right\| \leq$$

$$\left\|\bar{A}^{-1}\right\|\|\bar{z} - z\| + \left\|\bar{A}^{-1} - A^{-1}\right\|\|z\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\delta}{1-q} + \frac{\left\|A^{-1}\right\|^2\varepsilon\|z\|}{1-q} = \frac{\left\|A^{-1}\right\|\delta}{1-q} + \frac{\left\|A^{-1}\right\|\varepsilon q\|z\|}{1-q} = \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-q}(\delta + \varepsilon q\|z\|)$$

**Теорема 5**. [2, с.239-240]. Для относительной ошибки имеем:

$$\|z - \bar{z}\|/\|z\| \leq \delta, \left\|A - \bar{A}\right\|/\|A\| \leq \varepsilon, q = \varepsilon\nu(A) < 1.$$

$$\|x - \bar{x}\|/\|x\| \leq \left\|\bar{A}\right\|\|\bar{z} - z\|/\|x\| + \|z\|\left\|\bar{A}^{-1} - A^{-1}\right\|/\|x\| \leq (1-\varepsilon\nu(A))^{-1}(\left\|A^{-1}\right\|\delta\|A\| + \varepsilon\nu(A)\left\|A^{-1}\right\|\|A\|) =$$
$$\delta\nu(A)/+\varepsilon\nu^2(A)/(1-\varepsilon\nu(A)) = \nu(A)(\delta + \varepsilon\nu(A))/(1-\varepsilon\nu(A))$$

.

Эти оценки отличаются лишь коэффициентами от оценок В.В.Воеводина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. -336 с.

6 – TOM 12 – SON / 2023 - YIL / 15 - DEKABR

2.Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. -496 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1978.-432 с.

4. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. -244 с.

5. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. ИМ РАН, Новосибирск, 2010. – 940 с.

6.Иванов В.К., В.В. Васин В.К., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука,1974. -206.

7. Phillips D.L. A technic for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J. Assoc. Comput. Mach. , 1962,9, №1, p.84-97.

8.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. -286.

9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. 10. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: МГУ, 1987. -216.

11. Имомов А.О сглаживающих сплайнах. Вычислительные системы, 75. 1978. - 3-15 с.

12. Имомов А. Сплайны в выпуклых множествах. Препринт №65. ВЦ СОАН СССР, Новосибирск, 1979. -1-16 с.