6 – TOM 4 – SON / 2023 - YIL / 15 - APREL

GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN XARAKTERISTIK TO`RTBURCHAKDA BERILGAN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA.

https://doi.org/10.5281/zenodo.7832053

Qo`ldasheva Shoxsanam Ravshanjon qizi.

FDU matematika (yo`nalishlar bo`yicha) mutaxassisligi magistranti

qoldashevashohsanam10@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada giperbolik tipdagi tenglamalar uchun bitta yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma’lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masala tadqiq etilgan.*

Аннотация: *В данной статье исследуется нелокальная условная краевая задача для уравнений гиперболического типа, связывающая значения неизвестной функции в двух характеристических линиях, расположенных в одной полуплоскости и принадлежащих разным семействам характеристических линий.*

Abstract: *In this article, a nonlocal conditional boundary value problem with nonlocal condition connecting the values of the unknown function in two characteristic lines located in one half-plane and belonging to different families of characteristic lines for hyperbolic type equations has been studied.*

Kalit so`zlar: *nolokal shartli chegaraviy masala, giperbolik tipdagi tenglama, xarakteristik chiziqlar oilasi, Koshi masalasi.*

Ключевые слова: *нелокальная краевая задача, уравнение гиперболического типа, семейство характеристических линий, задача Коши.*

Key words: *nonlocal boundary value problem, equation of hyperbolic type, family of characteristic lines, Cauchy problem.*

Ushbu maqolada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

tenglama uchun quyidagi $AC_1: x + at = 0$ $BC_1: x - at = 1$, $AC_2: x - at = 0$, $BC_2: x + at = 1$ xarakteristikalar bilan chegaralangan D sohada bitta yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma’lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masala tadqiq etilgan. [1] da giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal shartli chegaraviy masalalar, [2], [3] da esa tipi va tartibi buziladigan giperbolik tipdagi tenglamalar uchun xarakteristik to`rtburchakda chegaraviy masalalar tadqiq etilgan.

Masalaning qo`yilishi: Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ funksiya topilsin:

1) $U(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$,

2) Ixtiyoriy $x \in (0,1)$ uchun $\lim\limits_{t\to+0} U_t(x,t)$ limit mavjud va $\lim\limits_{t\to-0} U_t(x,t) = \lim\limits_{t\to+0} U_t(x,0)$, $0 < x < 1$ ulash shartini qanoatlantirsin;

3) D_1 va D_2 sohalarda (1) tenglamani qanoatlantirsin;

4) $a_1(x)U(\theta_{01}) + b_1(x)U(\theta_{11}) = d_1(x),\ 0 \le x \le 1,$ (2)

$$a_2(x)U(\theta_{02}) + b_2(x)U(\theta_{12}) = d_2(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (3)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $a_j(x), b_j(x), d_j(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$ – berilgan funksiyalar bo`lib, $a_j^2(x) + b_j^2(x) \ne 0,\ \ j = 1,2.$

Ushbu masalaning yechimini

$$U(x,t) = \frac{\tau(x-at) + \tau(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \nu(z)dz \quad (4)$$

ko`rinishda qidiramiz, bu yerda $\tau(x)$ *va* $\nu(x)$ funksiyalar hozircha noma'lum funksiyalar bo`lib, bu funksiyalar $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1),\ \nu(x) \in C^2(0,1)$ xossalarga ega bo`lishi kerak.

(4) dagi $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalarni (2), (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan qilib aniqlaymiz. Buning uchun (4) ni (2), (3) shartlarga qo`yib $D_j\left(j=1,2\right)$ sohalarda olingan $AB$ dagi $\tau(x)$ va $\nu(x)$ o`rtasidagi asosiy funksional munosabatlarni topamiz:

$$P_1(x)\tau(x) = 2d_1(x) - a_1(x)\tau(0) - b_1(x)\tau(1) +$$
$$+\frac{a_1(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz - \frac{b_1(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\ \ 0 \le x \le 1 \quad (5)$$

$$P_2(x)\tau(x) = 2d_2(x) - a_2(x)\tau(0) - b_2(x)\tau(1) -$$
$$-\frac{a_2(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz + \frac{b_2(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\ \ 0 \le x \le 1 \quad (6)$$

bu yerda $P_j(x) = a_j(x) + b_j(x),\ \ j = 1,2$.

Shunday qilib, qo`yilgan masalaning yechimini topish (5) va (6) tenglamalar sistemasini yechishga teng kuchli ekanligini ko`rishimiz mumkin.

Agar, talab etilgan xossalarga ega bo`lgan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar (5), (6) sistemadan bir qiymatli topilsa, u holda masalaning $D_j(j=1,2)$ sohadagi yagona yechimi (4) formula bilan aniqlanadi.

Quyidagi teorema o`rinli.

Teorema. Aytaylik, quyidagi shartlardan biri bajarilsin:

1) $a_j(x)\equiv 0,\ j=1,2$

2) $b_j(x)\equiv 0,\ j=1,2$

3) $a_{1j}(x)\equiv 0,\ b_{2k}(x)\equiv 0,\ j\neq k,\ j,k=1,2;$

4) $a_j(x)\equiv 0, a_k(x)\not\equiv 0, b_k(x)\not\equiv 0, b_j(x)\not\equiv 0,\ j\neq k,\ j,k=1,2;\ \dfrac{b_j(0)}{a_j(0)}\neq -\dfrac{1}{2}$

5) $b_j(x)\equiv 0, a_k(x)\not\equiv 0, a_j(x)\not\equiv 0, b_k(x)\not\equiv 0,\ j=k,\ j,k=1,2;\ \dfrac{b_j(1)}{a_j(1)}\neq -\dfrac{1}{2}$

6) $a_j(x)\not\equiv 0, b_j(x)\not\equiv 0,\ j,k=1,2;\ \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\neq \dfrac{b_1(x)}{b_2(x)}$,

$$\frac{P_1(0)b_2(0)+P_2(0)b_1(0)}{a_1(0)b_2(0)-a_2(0)b_1(0)}\neq 0,\quad \frac{P_1(1)a_2(1)+P_2(1)a_1(1)}{a_1(1)b_2(1)-a_2(1)b_1(1)}\neq 0$$

U holda, agar, qo`yilgan masalaning yechimi mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni masala yechimi ikkita bo`lsin va ular $U_1(x,t)$ va $U_2(x,t)$ bo`lsin. U holda $U(x,t)=U_2(x,t)-U_1(x,t)$ funksiya qo`yilgan masalaga mos bir jinsli masalaning yechimi bo`ladi. Shuning uchun, masala yechimining yagonaligini isbotlash uchun, bir jinsli masalani qaraymiz, ya'ni, $d_j(x)\equiv 0,\ j=1,2$ bo`lgan masalani qaraymiz. Agar ushbu bir jinsli masalaning $U(x,t)$ yechimini aynan nolga teng ekanligini isbotlasak, ya'ni $U(x,t)\equiv 0$ bo`lsa, u holda $U_1(x,t)\equiv U_2(x,t)$ bo`lib, bundan farazimiz noto`g`ri ekanligi, ya'ni masala yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

Aytaylik, $U(x,t)$ - bir jinsli masalaning yechimi bo`lsin. Agar $d_j(x)\equiv 0,\ j=1,2$ bo`lsa, (2), (3) dan $x=0$ va $x=1$ bo`lganda $\tau(0)=0,\ \tau(1)=0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda (5), (6) ga asosan quyidagi tengliklar o`rinli bo`ladi:

$$P_1(x)\tau(x)=\frac{a_1(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz-\frac{b_1(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\quad 0\le x\le 1 \tag{7}$$

$$P_2(x)\tau(x)=-\frac{a_2(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz+\frac{b_2(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\quad 0\le x\le 1 \tag{8}$$

1-hol. Aytaylik, $a_j(x)\equiv 0,\ j=1,2$ bo`lsin. U holda, (7), (8) dan

$$\tau(x)=-\frac{1}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\quad 0\le x\le 1 \tag{9}$$

$$\tau(x)=\frac{1}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\quad 0\le x\le 1 \tag{10}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ushbu tengliklarni hadma-had qo`shib yuborsak, $\tau(x)\equiv 0, 0\le x\le 1$ ekanligini topamiz.

Agar (10) dan (9) ni ayirsak,

$$\int_x^1 \nu(z)dz=0,\ \ 0\le x\le 1 \qquad (11)$$

ni hosil qilamiz. (11) ning har ikki tomonini x bo`yicha differensiallasak, $\nu(x)\equiv 0,\ \ x\in(0,1)$ ekanligini topamiz. Natijada, (4) formulaga asosan, $\overline{D_j}(j=1,2)$ sohada $U(x,t)\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi.

6-hol. (Umumiy hol) Aytaylik, $a_j(x)\not\equiv 0,\ b_j(x)\not\equiv 0,\ j=1,2$, $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\ne\dfrac{b_1(x)}{b_2(x)}$ bo`lsin. Agar (7) tenglikning har ikki tomonini $b_2(x)$ ga, (8) tenglikni esa, $b_1(x)$ ga ko`paytirib ularni bir-biriga qo`shib yuborsak,

$$\frac{P_1(x)b_2(x)+P_2(x)b_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}\cdot\tau(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \nu(z)dz,\ 0\le x\le 1 \qquad (12)$$

kelib chiqadi.

Agar (7) tenglikning har ikki tomonini $a_2(x)$ ga, (8) tenglikni esa, $a_1(x)$ ga ko`paytirib qo`shib yuborsak,

$$\frac{P_1(x)a_2(x)+P_2(x)a_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}\cdot\tau(x)=\frac{1}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\ 0\le x\le 1 \qquad (13)$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerda $q_1(x)=\dfrac{P_1(x)b_2(x)+P_2(x)b_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}$, $q_2(x)=\dfrac{P_1(x)a_2(x)+P_2(x)a_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}$.

$\dfrac{P_1(0)b_2(0)+P_2(0)b_1(0)}{a_1(0)b_2(0)-a_2(0)b_1(0)}\ne 0$, $\dfrac{P_1(1)a_2(1)+P_2(1)a_1(1)}{a_1(1)b_2(1)-a_2(1)b_1(1)}\ne 0$ va $\tau(0)=0,\ \ \tau(1)=0$ ekanligini inobatga olib, (12), (13) larning har ikki tomonini x bo`yicha differensiallasak, mos ravishda quyidagilarga ega bo`lmiz:

$$\frac{1}{a}\nu(x)=q_1(x)\cdot\tau'(x)+q'_1(x)\cdot\tau(x)\ , \qquad (14)$$

$$-\frac{1}{a}\nu(x)=q_2(x)\cdot\tau'(x)+q'_2(x)\cdot\tau(x)\ . \qquad (15)$$

(14), (15) tengliklarni bir-biriga qo`shib yuborsak, natijada quyidagi

$$\left[\left(q_1(x)+q_2(x)\right)\cdot\tau(x)\right]'=0$$

munosabatga ega bo`lamiz. Agar, oxirgi tenglikni har ikki tomonini $x$ bo`yicha integrallasak,

$$\left(q_1(x)+q_2(x)\right)\cdot\tau(x)=C \qquad (16)$$

ni hosil qilamiz.

Agar

$$q_1(x)+q_2(x)=\frac{2P_1(x)\cdot P_2(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}\neq 0,\ 0\leq x\leq 1,\quad \tau(0)=\tau(1)=0$$

ekanligini inobatga olsak, u holda $x=0\left(yoki\,x=1\right)$ bo`lganda $\tau(0)=C=0$ $\left(\tau(1)=C=0\right)$ bo`ladi. Bundan esa, $x\in\left[0,1\right]$ da $\tau(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Buni (12), (13) ga qo`ysak, $x\in\left[0,1\right]$ da $\nu(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa, $U(x,t)\equiv 0$ bo`lib, $U_1(x,t)\equiv U_2(x,t)$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, teoremadagi 6) shartlar bajarilganda, agar, masala yechimi mavjud bo`lsa, u yagona ekanligi isbotlandi.

2)-5)- xollar ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1.Кумыкова С.К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. -1980.-Т. 16. №1 – С. 93-104.

2. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук, Нальчик.-2005.- Том 7.-№2.- С.68-73.

3. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. Ташкент.- 2005.- № 4.- С.102-110.