6 – TOM 4 – SON / 2023 - YIL / 15 - APREL

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СВЕХГРУПП.

https://doi.org/10.5281/zenodo.7831040

Буриев Толиб Эргашевич

(Преподователь в кафедре алгебры и геометрии в Самаркандском @государственном уриверситете,Узбекистан,город Самарканд.@)

Хасанова Диёра Вохидовна

(Магистрант кафедры алгебры и геометрии в Самаркандском@государственном университете,Узбекистан,город Самарканд.@e-mail:diyora.khasanova.97@mail.ru)

1.Определение произведения. Мы будем рассматривать сверхгруппы $T_1 = R_1 + H_1$ и $T_2 = R_2 + H_2$, которые удовлетворяют требованию: элементы одной из них можно однозначно комбинировать с элементами другой и при этом выполняется ассоциативный закон.

Назовем произведением двух свехргрупп T_1 и T_2 совокупность, обозначаемую символом T_1T_2 и состоящую из элементов вида t_1t_2, где t_1 любой элемент из T_1, а t_2 любой элемент из T_2. Таким образом, совокупность T_1T_2 состоит из произведений каждого элемента T_1 на все элементы T_2, при чем

$$T_1T_2 = (R_1 + H_1)(R_2 + H_2) = R_1R_2 + R_1H_2 + H_1R_2 + H_1H_2.$$

Произведение T_1T_2 не всегда обладает групповым свойством, то есть не всегда результат композиции $(t_1t_2)(t_1't_2')$ любых двух элементов из T_1T_2 будет входить опять в эту же совокупность. Возьмем сверхгруппы обобщенных подстановок:

$$T_1 = R_1 + H_1 = \left[\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,1\,4\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,2\,2\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,4\,4\,4\end{pmatrix}\right],$$

$$T_2 = R_2 + H_2 = \left[\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,1\,1\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,4\,4\,4\end{pmatrix}\right],$$

которые удовлетворяют поставленному выше требованию относительно рассматриваемых нами сверхгрупп, так как являются делителями одной и той же сверхгруппы обобщенных подстановок. Произведение этих двух сверхгрупп есть следующая совокупность:

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,3\,1\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,1\,4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,1\,1\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,2\,2\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,3\,3\,4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,4\,4\,4\end{pmatrix}.$$

Это совокупность не обладает групповым свойством, так как, например, результат композиции элементов $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,1\,4\end{pmatrix}$ равен подстановке $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,1\,2\,4\end{pmatrix}$, которая не входит в данную совокупность. Наша задача заключается в отыскании условий, при которых произведение T_1T_2 обладает групповым свойством и представляет сверхгруппу.

2. Необходимое и достаточное условие. Если $T_1 = R_1 + H_1$ и $T_2 = R_2 + H_2$

содержат одну и ту же единицу e , то имеет место следующая теорема:

Теорема 2: Произведение T_1T_2 сверхгрупп T_1 и T_2 тогда и только тогда сверхгруппа, когда:

$$T_2T_1 \subseteq T_1T_2. \qquad (1)$$

Доказательство. 1. Предполагая, что условие (1) имеет место, докажем, что произведение

$$T_1T_2 = R_1R_2 + R_1H_2 + H_1R_2 + H_1H_2$$

является сверхгруппой с нулевым элементом или без нулевого элемента. Условие (1) означает, что любой элемент t_2t_1 произведения T_2T_1 входит в T_1T_2, то есть, равняется какому, ни будь элементу $t_1't_2'$ из T_1T_2. Поэтому, беря любые два элемента t_1t_2 и $t_1't_2'$ из T_1T_2, получим (пользуясь ассоциативным законом):

$$(t_1t_2)(t_1't_2') = t_1(t_2t_1')t_2' = t_1(t_1''t_2'')t_2' = (t_1t_1'')(t_2''t_2') = t_1'''t_2''',$$

то есть, произведение любых двух элементов из T_1T_2 входит опять в T_1T_2.

Общая единица e сверхгрупп T_1 и T_2 является единицей и для T_1T_2:

$$(t_1t_2)e = t_1(t_2e) = t_1t_2.$$

В произведении T_1T_2 имеются элементы, для которых в T_1T_2 существуют обратные элементы, так, например, для элемента

$$t_1t_2 = r_1e = r_1$$

обратным является элемент

$$t_1't_2' = r_1^{-1}e = r_1^{-1}.$$

С другой стороны в T_1T_2 есть элементы, для которых в T_1T_2 нет обратных элементов; например, элемент $t_1''t_2'' = 0_1e = 0_1$ не имеет для себя обратного элемента. В с. д., предполагая, что для 0_1 в T_1T_2 существует обратный элемент $t_1'''t_2'''$, то есть, $0_1(t_1'''t_2''') = e$, умножением этого равенства слева на 0_1 приходим к $0_10_1(t_1'''t_2''') = 0_1e$ или $0_1(t_1'''t_2''') = 0_1$. Откуда, в силу однозначности произведения элементов T_1 и T_2, находим $e = 0_1$, что невозможно.

Обозначив элемент t_1t_2 из T_1T_2 через t , то есть, $t = t_1t_2$, докажем следующее: если для элементов t и t' из T_1T_2 имеются в T_1T_2 обратные элементы t^{-1} и t'^{-1}, то и произведение их tt' имеет в T_1T_2 обратный элемент $t'^{-1}t$, ибо

$$(tt')\left(t'^{-1}t^{-1}\right) = t\left(t't'^{-1}\right)t^{-1} = tt^{-1} = e.$$

Мы здесь пользовались ассоциативным законом, так как, умножение элементов T_1T_2 сводится к умножению элементов T_1 с элементами T_2, которое по предположению подчиняется ассоциативному закону.

Пример 2: Сверхгруппы

$$T_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\end{pmatrix}\right]$$

и

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 2\ 4 \end{pmatrix},$$

имеющие различные нулевые элементы $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 2\ 4 \end{pmatrix}$, в произведение дают сверхгруппу

$$T = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 1\ 1\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 2\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

с нулевым элементом $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{pmatrix}$.

Произведение же сверхгрупп

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix}$$

с различными нулевыми элементами $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix}$ будет сверхгруппой

$$T = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 2\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

без нулевого элемента. Итак, для $T = T_1 T_2$ выполняются все аксиомы сверхгруппы, кроме, быть может, аксиомы о нулевом элементе.

ЛИТЕРАТУРА:

1) А.Г. Курош, Теория групп. Москва, Наука, 1967, стр.:580 (третье издание, дополненное).

2) О.Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп. ГТТК,Киев,1916; 2-е изд., Москва, 1933; Избранные труды, Математика, М.1959, стр.:17-175.

3) М. Холл, The theory of groups, New York, 1959.(Русский перевод: Теория групп. ИЛ, 1962.) [60: 12,13617].

4) Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин, Упражнения по теории групп. Москва,1967. стр.45-95.

5) Артин Е.” The free product of groups”, Amer. J. Math.,69 (1947) 1-4.