

FAZODA SODDA GEOMETRIK SHAKLLAR HAQIDA O'QUVCHILARDA
TASAVVUR HOSIL QILISH

Ra'no Po'latova To'xtaevna

Toshkent davlat transport

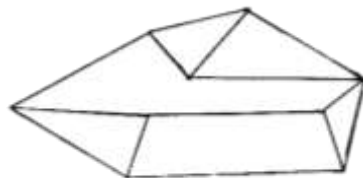
universiteti akademik litseyi o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada maktab va kasb-hunar maktabi o'quvchilarida fazoviy shakllar haqida to'liq ma'lumot berib o'tilgan.

Kalit so'zlar: Ko'pyoq, fazoviy jism, qavariq ko'pyoq, yassi qavariq ko'pburchak, prizma, kub, muntazam prizma, parallelepiped.

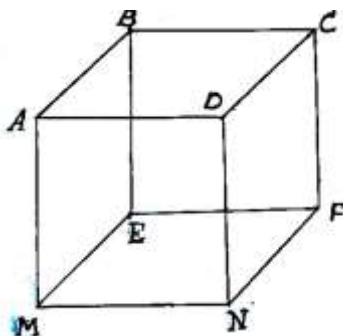
Geometriya kursida tekislikdagi figuralar va fazoviy jismlar o'rganiladi. Biz sirtida fazoviy jismlar – ko'pyoqlarga tegishli ma'lumotlarni keltiramiz.

1-ta'rif. Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko'pyoq deyiladi.



1-chizma

Ko'pyoqlar berilishi jihatidan ikki turga bo'linadi: muntazam va nomuntazam ko'pyoqlar. Ko'pyoq o'zini chegaralovchi tekisliklarning har biridan bir tomonda yotsa, u qavariqdir. Qavariq ko'pyoqning sirti bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko'pyoqning yoqlari yassi qavariq ko'pburchaklardan iborat. Ko'pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko'pyoqning uchlari deyiladi. Masalan, kub qavariq ko'pyoqdir, uning sirti oltita kvadratdan-yoqlardan tashkil topgan (2-chizma). ABCD, BEFC,... .Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Bu kvadratlarning AB,BC,BE,... tomonlari kubning qirralari bo'ladi. Kvadratlarning A,B,C,D,E,... uchlari kubning uchlari bo'ladi. Kubda oltita yoq, o'n ikkita qirra va sakkizta uch bor.

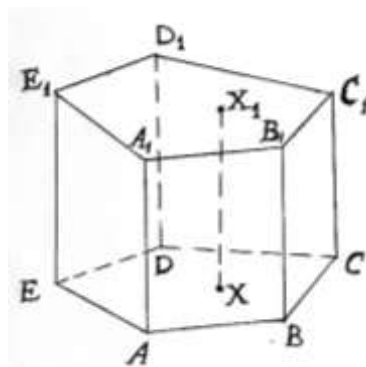


2-chizma

Prizma.

Prizma ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan barcha parallel to'g'ri chiziqlar kesmalaridan tuzilgan ko'pyoq bo'lib, bu kesmalar shu tekisliklardan birida yotgan

yassi ko'pburchakni kesib o'tadi (3-chizma). Ko'pburchaklar prizmaning asoslari deyiladi, mos uchlarni tutashtiruvchi kesmalar esa prizmaning yon qirralari deyiladi. Parallel ko'chirish harakat bo'lgani uchun prizmaning asoslari teng bo'ladi. Parallel ko'chirishda tekislik parallel tekislikka o'tgani uchun prizmada asoslar parallel tekisliklarda yotadi. Parallel ko'chirishda nuqtalar parallel to'g'ri chiziqlar bo'ylab ayni bir xil masofaga siljigani uchun prizmada yon qirralari parallel va o'zaro teng. Prizmaning sirti asoslaridan va yon sirtidan iborat. Yon sirti parallelogrammlardan iborat. Prizma asoslarining tekisliklari orasidagi masofa prizmaning balandligi deyiladi. Prizmaning bitta yog'iga tegishli bo'lmagan ikki uchini tutashtiruvchi kesma prizmaning diagonali deyiladi. Agar prizmaning asosi n burchakli bo'lsa, u n burchakli prizma deyiladi.

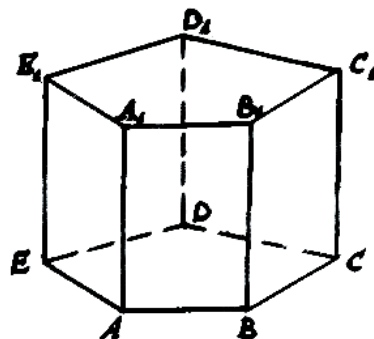


3-chizma

3-chizmada beshburchakli prizma tasvirlangan. Uning asoslari- $ABCDE, A_1B_1C_1D_1E_1$ beshburchaklardir. XX_1 -asoslarining mosnuqtalarini tutashtiruvchi kesma. Prizmaning yon qirralari- AA_1, BB_1, \dots, EE_1 kesmalaridir. Prizmaning yon yoqlari- $ABB_1A_1, BCC_1B_1, \dots$ parallelogrammlardir.

To'g'ri va muntazam prizma.

2-ta'rif. Agar prizmaning yon qirralari asoslariga perpendikulyar bo'lsa, bunday prizma to'g'ri prizma deyiladi. Aks holda og'ma prizma deyiladi. To'g'ri prizmaning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardir (4-chizma).



4-chizma

Agar to'g'ri prizmaning asoslari muntazam ko'pburchaklar bo'lsa, bunday prizma muntazam prizma deyiladi. Prizmaning yon sirti deb yon yoqlari yuzlarining

yig'indisiga aytiladi. Prizmaning to'la sirti yon sirti bilan asoslari yuzlarining yig'indisiga teng.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1.Prizma yon sirtining yuzi uning perpendikulyar kesimi bilan yon qirrasining ko'paytmasiga teng:

$$S_{yon} = P_{perp.kes.} \cdot l, \quad (1)$$

bu yerda $l = AA_1$.

To'g'ri prizmaning yon sirti asosining perimetri P_{as} bilan yon qirrasini uzunligi l ning ko'paytmasiga teng:

$$S_{yon} = P_{as} \cdot l, \quad (2)$$

2.Prizma to'la sirtining yuzi:

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{asos}, \quad (3)$$

formula orqali hisoblanadi.

3.Prizmaning hajmi uning asosi yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng:

$$V = S_{asos} \cdot h, \quad (4)$$

bu yerda h – prizma balandligi.

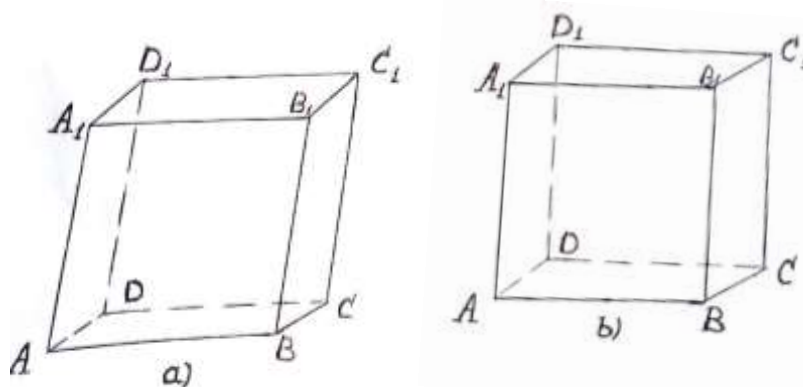
4.Og'ma prizma shunday prizмага tengdoshki, uning asosi og'ma prizmaning perpendikulyar kesimiga, balandligi esa og'ma prizmaning yon qirrasiga tengdir.

Parallelepiped.

3-ta'rif. Prizmaning asosi parallelogramm bo'lsa, bunday prizma parallelepiped deyiladi.

Parallelepipedning hamma yoqlari parallelogrammlardir. Agar prizmaning yon yoqlari ham parallelogrammlardan iborat bo'lsa, u og'ma parallelepiped, yon yoqlari asoslarga perpendikulyar bo'lsa, parallelepiped to'g'ribo'ladi, hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat parallelepiped to'g'ri burchaklidir.

5-a chizmada og'ma parallelepiped, 5-b-chizmada to'g'ri parallelepiped tasvirlangan.



5-chizma

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1.Parallelepipedning qarama-qarshi tomonlari teng va parallel.

2.Parallelepipedning diagonalari bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

3.Parallelepiped diagonalari kvadratlarining yig'indisi uning hamma qirralari kvadratlarining yig'indisiga teng.

4.To'g'ri burchakli parallelepiped istalgan diagonalining kvadrati uning uchta o'lchovi kvadratlari yig'indisiga teng.

Parallelepipedning perpendikulyar kesimi uning yon qirrasiga perpendikulyar o'tkazilgan tekislik va parallelepipedning kesishishidan hosil bo'lgan kesimdir.

5.Og'ma parallelepipedning yon sirti perpendikulyar kesimning perimetri bilan yon qirrasining ko'paytmasiga teng:

$$S_{yon} = P_{per.kes.} \cdot l, \quad (5)$$

6.To'g'ri parallelepipedning yon sirti uning asosi perimetri bilan yon qirrasining ko'paytmasiga teng:

$$S_{yon} = P_{asos} \cdot H, \quad (6)$$

7.Parallelepiped to'la sirtining yuzi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{asos}, \quad (7)$$

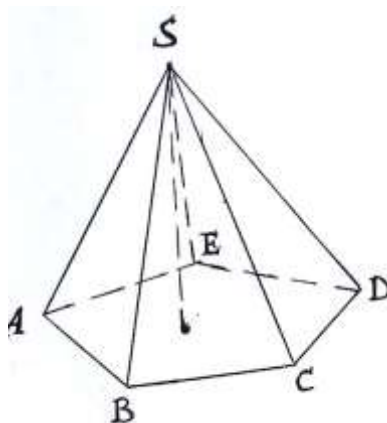
8.Parallelepipedning hajmi-uning asosi yuzi va balandligining ko'paytmasiga teng:

$$V_{par-d} = S_{asos} \cdot H, \quad (8)$$

Piramida.

4-ta'rif. Piramida deb shunday ko'pyoqqa aytiladiki, u yassi ko'pburchak piramida asosidan, asos tekisligida yotmagan nuqta – piramida uchidan va uchni asosining nuqtalari bilan tutashtiruvchi hamma kesmalardan iborat (6-chizma). Piramidaning uchini asosining uchlari bilan tutashtiruvchi kesmalar piramidaning yon qirralari deyiladi.

Piramidaning sirti asosidan va yon yoqlaridan iborat. Har bir yon yoq uchburchak.Uning uchlaridan biri piramidaning uchi bo'ladi, qarshisidagi tomoni esa piramida asosining tomoni bo'ladi.Piramidaning uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyar piramidaning balandligi deyiladi.Piramidaning asosi n burchakdan iborat bo'lsa, u n burchakli piramida deyiladi.Uchburchakli piramida tetraedrdeb ham ataladi.



6-chizma

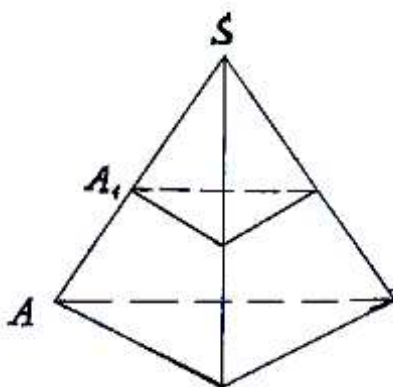
6-chizmada: S – piramidaning uchi; $ABCDE$ – piramidaning asosi; ΔSAB , ΔSBC , ΔSCD , ΔSDE , ΔSEA – piramidaning yon yoqlari; SA , SB , SC , SD , SE – piramidaning yon qirralari; SO – piramidaning balandligidir. Muntazam piramida – asosi muntazam ko'pburchak bo'lib, balandligi asosning markazidan o'tadigan piramidadir. Muntazam piramidaning o'qi uning balandligi yotgan to'g'ri chiziqdan iborat. **Apofema** – muntazam piramida yon yog'ining uchidan o'tkazilgan balandlikdir.

Kesik piramida.

1-teorema. Piramidaning asosiga parallel va uni kesib o'tadigan tekislik shu piramidaga o'xshash piramida ajratadi.

Isboti. Faraz qilaylik, S – piramidaning uchi, A – asosining uchi, A_1 – kesuvchi tekislikning SA yon qirra bilan kesishish nuqtasi (7-chizma). Piramidani S uchiga nisbatan

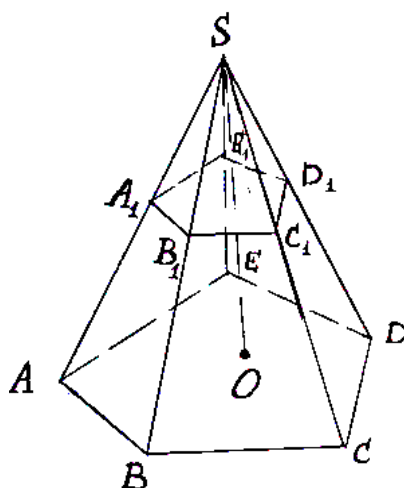
$$k = \frac{SA_1}{SA}$$



7-chizma

gomotetiya koeffitsiyenti bilan gomotetik almashtiramiz. Bunday gomotetiyada asos tekisligi A_1 nuqta orqali o'tuvchi parallel tekislikka o'tadi, ya'ni kesuvchi tekislikka o'tadi, demak, butun piramida bu tekislik kesib ajratgan qismga o'tadi. Gomotetiya o'xshashlik koeffitsiyenti bo'lganligi uchun piramidaning kesib ajratilgan qismi berilgan piramidaga o'xshash piramida bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teoremaga ko'ra piramida asosining tekisligiga parallel bo'lgan va piramidaning yon qirralarini kesib o'tuvchi tekislik piramidadan unga o'xshash piramida ajratadi. Ajratilgan bo'lakning ikkinchi qismi ham ko'pyoq bo'lib, kesik piramida deyiladi (8-chizma). Kesik piramidaning parallel tekisliklarda yotgan yoqlari piramidaning asoslari deyiladi, qolgan yoqlari esa yon yoqlari deyiladi. Kesik piramidaning asoslari o'xshash ko'pburchaklardan, yon yoqlari esa trapetsiyalardan iborat.



8-chizma

Muntazam ko'pyoqlar.

Agar qavariq ko'pyoq yoqlarining tomonlari soni bir xil bo'lgan muntazam ko'pburchakdan iborat bo'lsa va shu bilan birga ko'pyoqning har bir uchida bir xil miqdordagi qirralar uchrashsa, bunday qavariq ko'pyoq muntazam ko'pyoq deyiladi. Muntazam qavariq ko'pyoqlarning besh turi bor: muntazam tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr. Muntazam tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat; har bir uchida uchtdan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramidadan iborat. Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat; har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipeddir. Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, tetraedrda farqi shundaki, uning har bir uchida to'rttdan qirra birlashadi. Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtdan qirra birlashadi. Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, tetraedr va oktaedrda farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi.

Quyidagi xossalar va tasdiqlar o'rinli.

1. Piramidaning asosiga parallel va uni kesib o'tadigan tekislik o'tkazilgan bo'lsa, piramidaning asosi va kesim yuzlarining nisbati piramida uchidan asoslarga bo'lgan mos masofalar kvadratlarining nisbatiga teng:

$$\frac{S_{as}}{S_{kes}} = \frac{H^2}{h^2}, \tag{9}$$

2. Muntazam piramidaning yon sirti asosining perimetri va apofemasi ko'paytmasining yarmiga teng:

$$S_{yon} = \frac{1}{2} P_{as} \cdot l, \tag{10}$$

bu yerda l – apofema, P_{as} - asosning perimetri.

3. Piramidaning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng:

$$V_{pir.} = \frac{1}{3} S_{as} \cdot H, \tag{11}$$

bu yerda S_{as} - asosi yuzi, H – balandligi

4. Muntazam kesik piramidaning yon sirti – uning asoslari perimetrlari yig'indisining yarmi bilan apofemasining ko'paytmasiga teng:

$$S_{yon} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l, \quad (12)$$

bu yerda P_1 – quyi asos perimetri, P_2 – yuqori asos perimetri, l – apofema.

5. Muntazam bo'lmagan kesik piramidaning yon sirti uning yon yoqlari yuzlarining yig'indisiga teng.

6. Agar kesik piramida asoslarining yuzlari mos ravishda, S_1 va S_2 , balandligi h bo'lsa (9-chizma), kesik piramidaning hajmi

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}), \quad (13)$$

formula orqali hisoblanadi.

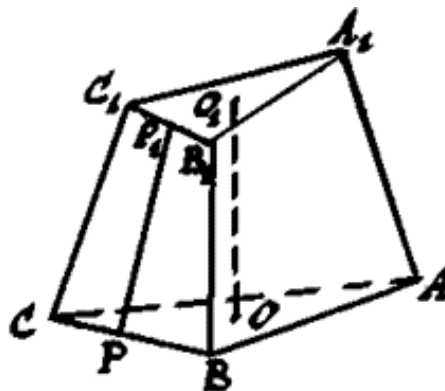
7. O'xshash bo'lgan piramidalar hajmlarining nisbati ularning mos chiziqli o'lchovlari kublarining nisbatiga teng:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{a^3}{a_1^3}, \quad (14)$$

8. Piramida to'la sirtining yuzi

$$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos}, \quad (15)$$

formula orqali hisoblanadi.



9-chizma

ADABIYOTLAR:

1. Ш.А. Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. А.У. Абдухамидов ва boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
3. Г.П. Бевз и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
4. “Математика в школе” jurnali.