УДК 518.0

АЛГОРИТМЫ МЕТОДОВ КРЫЛОВА И ДАНИЛЕВСКОГО ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Имомов Адаш

adashimomov50@gmail.com

к.ф.-м.н., Наманганский государственный университет, Узбекистан

Аннотация: *В статье рассматриваются классические методы нахождения польной проблемы собственных значений и векторов матриц, такие как непосредственное нахождение с помощью команд математической системы **Mathcad**, двухступенчатого классического метода по определению, методами Крылова и Данилевского. Для всех методов построены укрупнёные алгоритмы, состоящие из последовательности математических формул и команд математической системы **Mathcad**. Здесь **Mathcad** выступает как испольнитель укрупнённого математического алгоритма решения задачи. Для всех методов получены собственные значения и собственные векторы матриц двумя способами: методом внутренной команды **Mathcad eigenvals(A)**, **eigenvecs(A)** и методами Крылова и Данилевского. Только в случае совпадения результатов по этим и методами укрупнённый алгоритм считается правильным. В обсуждении рассмотрена матрица десятого порядка, для которой по предлагаемыми методами получены совпадающие численные величины собственных значений и векторов.*

Ключевые слова: *алгоритм, крупная операция, алгоритмический язык, испольнитель алгоритма, **Mathcad**-исполнитель укрупнённого алгоритма, алгоритмы и программы в **Mathcad** методов Крылова и Данилевского для собственных значений и векторов матриц.*

Введение.

Задачи определения собственных значений и векторов имеет вид:

$$Ax = \lambda x, x \neq 0, \lambda, x = ?, \qquad (1)$$

где A- матрица порядка $n \times n$. В этом уравнении неизвестные: n-скалярных величин λ и n собственных векторов $x \neq 0$. Теорией и применением собственных значений и векторов занимались академики С.Л. Соболев, И.А.Крылов, Д.К. Фаддеев, Г.И.Марчук, А.А. Самарский, Н.Н. Яненко, С.К. Годунов, а также Якоби, Гивенс, Уилкинсон, Фробениус, Френсис и др.

Поскольку, задача (1) однородная система линейных уравнений по x, решение существует тогда и только тогда когда:

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - ... p_{n-1}\lambda - p_n) = 0. \qquad (2)$$

Алгебраическое уравнение (2) называется характеристическим или вековым уравнением (ХУ) матрицы. Введём диогональные миноры [1]:

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \; p_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \; p_3 = \sum_{i<k<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{ji} & a_{jk} & a_{jj} \end{vmatrix}, \ldots, p_n = \det(A). \qquad (3)$$

Классический способ поиска собственных значений состоит из двух этапов:

3) определение коэффициентов характеристичесого уравнения;

4) решение характеристического уравнения .

Для поиска собственных значений симметрических матриц разработаны итерационные методы вращений Якоби, Гивенса. Для любых матриц разработаны итерационные методы поиска экстремальных собственных значений и классические универсальные методы Леверрье, Фаддеева, Крылова, интерполяции, Рутисхаузера LU, Френсиса QR.

Теоретические основы задачи изложены в [1-7]. Алгебраический подход к приближёным методам собственных значений имеется в [8,9]. Задача о собственных значений для несимметрических матриц рассмотрены в [8]. Программы на языке Algol имеются в [9]. В работе [10] имеются программы методов для экстремальных собственных значений и метода интерполяции на трёх языках Бейсик, Паскаль и Фортран. Программы на языке Бейсик имеются и в [5] для экстремальных собственных значений, Якоби, QR. Появились программы на языке Python [11]. В [12,13] имеются укрупнёные алгоритмы нахождения собственных значений в Mathcad. В [14] имеются большое количество программ в Mathcad. В [15] изложены алгоритмы и программы в Mathcad классического метода, методов Крылова, Леверрье, Фаддеева, интерполяции, многообещающего итерационного метода QR.

В математических системах решение задачи можно найти 4-мя способами:

1) на основе команд-система-большой калькулятор;

2) на основе математического алгоритма-система испольнитель алгоритма;

3) на основе внутренного языка-система среда программирования;

4) на основе интерактивного способа-система-обучающая программа .

Для решения задач методов вычислений важную роль играет второй способ решения задач, так как в этом способе задача решается только с помощью математического алгоритма решения задачи. Matchad выступает в качестве испольнителя *укрупнённого алгоритма*, а ползователь играет роль создателя алгоритма. *Под укрупнённым алгоритмом мы понимаем последовательность математических формул, и команд математической системы, дающую решение задачи*. Укрупнённые команды, это, вычисления степеней матрицы, определителя, обратной матрицы, интеграла, решение дифференциального уравнения, и т.д. [12-13]. Наши мысли, мы демонстрируем примерами: нахождение собственных значений и векторов матриц классическими методами акад. Крылова [2] и Данилевского [3]. В этих методах сначала находиться вековое уравнение, и затем, собственные значения и собственные векторы. Адекватность результатов наших алгоритмов мы проверяем внутренной функцией системы по нахождению собственных значений и векторов матрицы. В дальнейшем обозначим через -матрицу, единичная матрица. Введём матрицу Фробениуса:

.

Разлагая по элементам первой строке имеем [1]:

. **(4)**

II. Методы решения. Укрупнённые алгоритмы и программы.

5. Метод команд системы Mathcad. **Вычислим собственные значения и векторы матрицы по команде Mathcad и проверим правильность результата по формуле** :

ORIGIN: =1 $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $n := cols(A)$ $E := identity(n)$ **//задание матриц A,E**

// ,**v**

//проверка правильности ,v

6. Классический универсальный метод. Этапы метода:

3) Вычисление векового уравнения: $D(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - \sum_{i=1}^n p_i \lambda^{n-i}) = 0$.

4) Решение векового уравнения: $D(\lambda_i) = |A - \lambda_i E| = 0, \lambda = \lambda_i, i = 1..n$.

Ранее, этот метод применялся только для матриц малых порядков: .

Для двух этапного процесса составим укрупнённый алгоритм:

ORIGIN: =1 $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $n := cols(A)$ $E := identity(n)$ //задание матриц A,E

// ХУ по команде Mathcad

$p(x) := D(x) coeffs, x \rightarrow [160 \quad 64 \quad -28 \quad -8 \quad 1]^T$ // выделение коэффициентов ХУ

$r := polyroots(p)$ $r = [-2.828 \quad -2 \quad 2.828 \quad 10]^T$ // вывод собственных значений

//проверка

7. Метод акад.Крылова для собственных значений и векторов [1].

Пусть вековое уравнение матрицы A. По теореме Гамильтона-Келли матрица удовлетворяет свое вековое уравнение: (краткое доказательство) . Имеем

.

Отсюда получаем .Последнее уравнение умножим на произвольный ненулевой вектор и получаем векторное уравнение:

.

Вводя векторы , для неизвестных коэффициентов векового уравнения получаем систему линейных уравнений:

6 –TOM 2 – SON / 2023 - YIL / 15 - FEVRAL

.

Нахождение собственных векторов в методе Крылова. В равенстве (4) положим ,. Характеристическое уравнение записываем в виде . По теореме Гамильтона- Кели имеем. Умножим его на вектор :

.

Собственный вектор для собственного значения обозначим :

. (5)

Учитывая равенство (4) записываем:

(6)

Здесь коэффициенты при на разных частях равенства приравниваем:

(7)

Отсюда, начиная с последнего равенства последовательно находим:

Одно из решений этих уравнений определим так:

(8)

После определения коэффициентов находим собственный вектор:

(9)

Приведём программу, находящую как собственные значения так и векторы:

ORIGIN: =1 $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $n := cols(A)$ $E := identity(n)$ $\beta := identity(n)$ $y := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

// ХУ команде Mathcad

$p(x) := D(x) coeffs, x \rightarrow \begin{bmatrix} 160 & 64 & -28 & -8 & 1 \end{bmatrix}^T$ // выделение коэффициентов ХУ

$r := polyroots(p)$ $r = \begin{bmatrix} -2.828 & -2 & 2.828 & 10 \end{bmatrix}^T$ // собственные значения по команде

//проверка

//коэф

//

// вычисление собственных векторов по Крылову

//коэф.

// нормировка собственных векторов

//собс. векторы

8. Метод Данилевского для собственных значений и векторов [1,3].

В задаче о собственных значений и векторов существуют методы, использующие преобразования подобия. Матрицы А и В называются подобными, если существует преобразование М или N, такие что справедливы раенства: . Здесь матрица В должна быть более проста, чем матрица для решения задачи о собственных значений чем матрица А:

$$\det(B - E\lambda) = \det(T^{-1}(A - E\lambda)T) = \det(T^{-1})\det(A - E\lambda)\det(T) = \det(A - E\lambda) .$$

Это значить, подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Кроме того, собственные векторы подобных матриц связаны по формуле:

$Ax = \lambda x \Rightarrow M^{-1}Ax = \lambda M^{-1}x, x = My \Rightarrow M^{-1}AMy = \lambda y \Rightarrow By = \lambda y \Rightarrow x = My$.

Метод Данилевского почти одновременно введён также Фребениусом. Метод Данилевского состоит из регулярного и нерегулярного случая. В регулярном случае данная матрица через n-1 шагов подобного преобразования приводится к форме Фробениуса.

1-шаг. Пусть . Вводиться преобразования , где

Здесь приняты обозначения

2-шаг. Пусть в матрице , элемент . Тогда вводятся преобразования ,где

Здесь приняты обозначения .

Таким образом, в регулярном случае когда , после выполнения n-1 шагов матрица A будет приведена к каноническому виду

.

Для регулярного случая построим укрупнённый алгоритм с вычислениями.

//матрица, и её порядок

// ведущие элементы

//n-1-шаг

// ведущие элементы

//n-2-шаг

//ведущие элементы

$$M_1 := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 := M_1^{-1} * A^2 * M_1 \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 28 & -64 & -160 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ //n-3-шаг

////вектор y

//

В случае: , получаем простую запись. Это версия более естественна. Отдельно необязательно ввести обратные матрицы, так как система Mathcad сама их вычисляет.

//матрица, и её порядок

//n-1-шаг

//n-2-шаг

//n-3-шаг

////**вектор y**

//

Нерегулярный случай состоит из двух частных подслучаев[1,3]:

1-подслучай.Пусть процесс приведения A к форме Фробениуса доведён до строки номера k и выполнено, следовательно n-k шагов преобразований; при этом оказалось, что . Допустим, что . В этом случае необходимо поменять местами столбцы и строки с номерами i и k. Это задача выполняется одним преобразования подобия T вида [1].

2-подслучай. Пусть и . В этом случае

,

и матрица уже каноническая, остаётся привести матрицу , к каноническому виду.

9. Метод Хаусхолдера сведение матрицы к Хессенберговсой форме.

Квадратные матрицы с помощью n-2 преобразований подобия вида

$P_k = E - 2w_k * w_k^T, A_1 = A, A_{k+1} = P_k A_k P_k^T, k = 1..n-2$,

могут быть сведены к матрицам к верхне треугольной форме Хессенберга. Хессенберговая форма симметрических матриц есть трёхдиогональная матрица. Приведём укрепнённый алгоритм для алгоритма Бурдена[6].

III. Обсуждение результатов. Рассмотрим симметрическую матрицу десятого порядка:.

Для сравнения вычислим собственные векторы этой матрицы выше методами Крылова, Данилевского и по команде Mathcad:

x =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.388	0.322	-0.231	0.12	0.422	-0.422	0.388	-0.322	0.231	-0.12
1	-0.322	0.422	-0.388	0.231	0.12	0.12	-0.322	0.422	-0.388	0.231
2	0.12	0.231	-0.422	0.322	-0.388	0.388	-0.12	-0.231	0.422	-0.322
3	0.422	-0.12	-0.322	0.388	-0.231	-0.231	0.422	-0.12	-0.322	0.388
4	0.231	-0.388	-0.12	0.422	0.322	-0.322	-0.231	0.388	0.12	-0.422
5	-0.231	-0.388	0.12	0.422	0.322	0.322	-0.231	-0.388	0.12	0.422
6	-0.422	-0.12	0.322	0.388	-0.231	0.231	0.422	0.12	-0.322	-0.388
7	-0.12	0.231	0.422	0.322	-0.388	-0.388	-0.12	0.231	0.422	0.322
8	0.322	0.422	0.388	0.231	0.12	-0.12	-0.322	-0.422	-0.388	-0.231
9	0.388	0.322	0.231	0.12	0.422	0.422	0.388	0.322	0.231	0.12

vv =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0.388	0.322	-0.231	0.12	0.422	-0.422	0.388	-0.322	0.231	-0.12
2	-0.322	0.422	-0.388	0.231	0.12	0.12	-0.322	0.422	-0.388	0.231
3	0.12	0.231	-0.422	0.322	-0.388	0.388	-0.12	-0.231	0.422	-0.322
4	0.422	-0.12	-0.322	0.388	-0.231	-0.231	0.422	-0.12	-0.322	0.388
5	0.231	-0.388	-0.12	0.422	0.322	-0.322	-0.231	0.388	0.12	-0.422
6	-0.231	-0.388	0.12	0.422	0.322	0.322	-0.231	-0.388	0.12	0.422
7	-0.422	-0.12	0.322	0.388	-0.231	0.231	0.422	0.12	-0.322	-0.388
8	-0.12	0.231	0.422	0.322	-0.388	-0.388	-0.12	0.231	0.422	0.322
9	0.322	0.422	0.388	0.231	0.12	-0.12	-0.322	-0.422	-0.388	-0.231
10	0.388	0.322	0.231	0.12	0.422	0.422	0.388	0.322	0.231	0.12

Здесь .   Значения собственных векторов одинаковые.

IV. Заключение. В работе исследован классические методы Крылова и Данилевского вычисления всех собственных значений и векторов действительных матриц. Методы даёт хорошие результаты для матриц порядков . Для проверки результатов работы составлены укрупненные алгоритмы в Mathcad . Результат алгоритма совпадает с результатоми по внутренной команде вычисления собственных значений и векторов Mathcad. Универсальные методы: классический, Леверрье, Фаддеева, интерполяции, QR, а также методы Крылова, Данилевского работают хорошо при учете обстоятельств.

V. Благодарственность. Автор выражает благодарность членам

кафедры «Информатика» НамГУ М.Дадахонову, Ш.Болтабоеву, С. Иномиддинову, С.Настинову за подддержку и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Крылов В.Н., Бобков В.В., Монастирный П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, т.1,1976,304 с.

2. Крылов И.А. «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем». ИАН, ОМЕН, 1931, №4, 491-539 с.

3. Данилевский А.М. О численном решении векового уравнения. Матем. сборник, 1937. №2, [44], 169-171 с.

4. Шарый С.П. Курс вычислительных методов . ИВТ СОРАН, Н.:2018.-607 с.

5. Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике.М.:ВШ, 1990.-256 с.

6.Burden R.L. Numerical Analysis. Books Cole. Boston, USA.-2010.-895 p.

8.Икрамов Х.Д. Несимметрическая проблема собственных значений. М.:Наука, 1991.-240 с.

9.Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. М.:Машиностроение, 1976.-390 с.

10.Мудров Е.М. Программы для ПК на языке Бейсик, Паскаль, Фортране. Томск, МП Раско, 1992.-272 с.

11.Kiusalaas J. Numerical Methods in Ingineering with Phyton **3. NY.-2013.-438p.**

12.Имомов А.Решение польной проблемы собственных значений матриц в Mathcad. Научный вестник НамГУ, 2021, №5, с. 62-67.

13.Имомов А. Mathcad-испольнитель укрупнённых алгоритмов. Научный вестник НамГУ, 2022, №1, с. 62-69.

14. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. СПб, 2008.-350с.

15. Имомов А. Алгоритмы и программы собственных значений матриц. Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и искусственного интеллекта в управлении. : г. Самарканд, 26-27 октября 2022 г. : в 2 ч. Ч. 2 Ташкент: Изд-во НИИ РЦТИИ, 2022. – 394 с.

16. Tohirjon o‘g‘li A. U., Nizomiddinovich I. S., Tojiddin o‘g‘li N. S. INTEGRAL TENGLAMALARNI MATHCAD DASTURIDA TAQRIBIY YECHISH USULLARI //INNOVATION IN THE MODERN EDUCATION SYSTEM. – 2022. – T. 2. – №. 18. – C. 880-883.