5 – SON / 2023 - YIL / 15 - YANVAR

TEYLOR FORMULASINI MATEMATIK MASALALAR YECHISHDAGI AHAMIYATI

O'ktamova Muxlisa Akmaljon qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Matematika va informatika yo'nalishi 2-bosqich talabasi

Annotasiya: *Ushbu maqolada Teylor formulasini matematik masalalarni yechishdagi ahamiyati: elementar funksiyalarni qatorlarga yoyilmasi va uning tabiatini o'rganish, limitlarni hisoblashda funksiyani ma'lum bir qiymatida taqribiy qiymatini topish,integral ostida elementar funksiyalar bilan bog'lab bo'lmaydigan integralni hisoblash,differensial tenglamalarni qatorlar yordamida yechish kabi masalalar o'rganilgan.*

Kalit so'zlar: *Qatorlar, elementar funksiyalar, limit, funksiya qiymati, integral, tenglama, Makloren formulasi, Nyuton formulasi*

Teylor formulasini matematik masalalarni yechishdagi ahamiyati: elementar funksiyalarni qatorlarga yoyilmasi va uning tabiatini o'rganish,limitlarni hisoblashda,funksiyani ma'lum bir qiymatida taqribiy qiymatini topish,integral ostida elementar funksiyalar bilan bog'lab bo'lmaydigan integrallarni hisoblash,differensial tenglamalarni qatorlar yordamida yechish kabi masalalar o'rganilgan.

Teylor formulasi funksiyani qatorga yoyishda qo'llaniladi. Qatorga biz biror nuqta atrofida yoyamiz bunda esa funksiyaning bazan qator shakli foydalanish zarurati tug'iladi, chunki qaralayotgan funksiyaning shu nuqtaga nisbatan ba'zi xossalarni tekshirishda qatorga yoygan holda tekshirish qulay. Qolaversa matematikaning ko'plab masalalarida aynan qator shaklidan foydalaniladi. Ingliz matematigi Bruk Teylor matematika faniga o'zining juda ko'p ilmiy ishlari bilan katta xissa qo'shganl olimlardan biridir. Uning matematika tarixida buyuk kashfiyotlaridan biri, o'zining 29 yoshida ya'ni 1715-yilda yaratgan nazariyasi bilan matematika tarixida o'chmas iz qoldirdi. Bu kashfiyot nimadan iborat Bizga y = f(x) funksiya berilgan bo'lsin. Mana shu funksiyani shunday

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \ldots\ldots}$$

bo'lsin. Agar qator hadlarini yetarlicha katta olsak, u shunchalik funksiyaga yaqinlashadi.

B.Teylorning bu kashfiyoti "Methodus incrementorumdirecta et inversa" deb nomlanib, lotin tilida 1715-yili yozildi. I.Nyuton va G.Leybnits Teylor zamondoshlari bo'lib, ular differensial va integral hisob asoschilari hisoblanadi. Teylor mana shu differensial va integrak hisob asosida o'zining kashfiyotini amalga oshirdi.

Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ushbu

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x\text{-}x)+a_2(x\text{-}x_0\ )^2 + \qquad + a_n\ (x\text{-}x_0)^{n\text{-}1} \qquad (6)$$

(bunda a, a a a va xo'zgarmas haqiqiy sonlar,n EN) ko'phadni qaraylik. Bu ko'phadni ketma ket n marta differensiallab topamiz:

$P_n(x) = a_1 + 2^*a_2 (x-x_0) + 3\text{-}a_3 (x-x_0)^2 + \quad + na_n (x-x_0)^{n-1}$

$P_n(x)=2^*a_2 + 3^*2\ a_3(x-x_0)^2+ \quad +n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2}$

$P_n(x)=3^*2\ a_3 + \quad +n(n-1)(n-2)a_n (x-x_0)^{n-3}$

$P_n^{(n)}(x)= n (n-1) (n-2) \quad 2^*a_n$ (7)

Bu (6) va (7) tengliklarda $x = x_0$ deb olinsa, unda berilgan $P_n(x)$ ko'phad va uning hosilalari

$P_n^{(k)}(x)$ (k=1,2, n) ning x_0 nuqtadagi qiymatlari topiladi:

$P_n(x_0) = a_0$

$P_n(x_0) = 1!a_1$,

$P_n(x_0) = 2!a_2$

$P_n^{(n)}(x_0) = n!a_2$

Ulardan

$a_n = P_n(x_0)$,

$a_{1=} = \frac{P_n(X_0)}{1!}$,

$a_{2=} = \frac{P_n(X_0)}{2!}$,

$a_{n=} = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$, (8)

kelib chiqadi.

Shunday qilib, P(x) ko'phadning koeffitsiyentlari ko'phad va uning hosilalarining x, nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalanadi. Koeffitsiyentlarning bu qiymatlarini (6)ga qo'ysak, unda

P(x) = P(x) + P(x) (x-x)+

n n!

(9)

bo'ladi. Bu ko'phad (6) ko'phaddan koeffitsiyentlarining yozilishi bilangina farq qiladi.

(9)formula ko'phad uchun Teylor formulasi deb ataladi.

Teylor formulasining Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadi. Teylor formulasi

$R_1(x)$

Qoldiq hadi yozilishining turli ko'rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko'rinishi bilan tanishamiz.

Qaralayotgan f(x) funksiya x, nuqta atrofida n+1 tartibli hosilaga ega bo'lsin deb olamiz va yangi

g(x) = (x-x)n+1

funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

g(x) = g(x) =) = ... = g(x) = 0; g)(x) = (n + 1)! = 0.

Ushbu

R(x) = f(x)-P(x) va g(x) = x-x)**

Funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda

R(x) = R(x) = = R(x) = 0

E'tiborga olib quyidagini topamiz:

R(x) R (x)-R (x) R(c) R(c)-R' (x) R(c) = = = g(x) g(x)-g(x) g(x) g(x)-g'(x) g"(c_2) R(c) (n]

(n+1) R(x)-Rx R (E) = (n+1)(g(x)-g(x) g" (E)

bu yerda

c, E (xx), c_2 = (xic,),... C, E (xic),

Shunday qilib biz

R() R(E) g(x) = (n+1) g (E)

ekanligini ko'rsatdik, bu yerda

ε € (x,x)

Endi

g(x) = (x-x)"^{*1}

g+1)()(n+1)!, R^{1}) (§) = f^{1+1}(§)

ekanligini e'tiborga olsak,quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

+(E)

(14)

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

R(x) =

(n+1)!

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda

msbat son,ya'ni

(n+1)! (x-x)^*',& € (x,,x) Bu (14) formulani Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi.

R(x) =

\n+1

(15)

birdan kichik bo'lgan

0<0<1

Shunday qilib, f(x) funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

f(x) = f(x) + f(x)(x-x) + 2;f(x) $(xx)^2$ + - +

+ 1 f("\(x) (x-x)" + " + "(5))(x-x)^*', bu yerda & € (x,;x). n! (n+1)!

Agar

X=0

bo'lsa u holda

{= x + 0(x-x) = 0x

bu yerda

0 <0 <1

Bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$R_1(x)$ = +6 (n+1)!

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda musbat son,ya'ni birdan kichik bo'lgan

0 <0 <1

Shunday qilib, f(x) funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

f(x) = f(x) + f(x)(x-x) + 2,f(x) $(x-x)^2$ + - +

17, f(m) (x) (x-x)" + n! f(n+1)(E) (n+1))(x-x)*, bu yerda & € (x,;X).

Agar

X=0

bo'lsa u holda

= x + 0(x-x) = 0x

bu yerda

0<0<1

Bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

1 n! f(x) = f(0) + f(0)x + shaklida yoziladi. + ... + (0)x() + (ex) xn+1 (16) (n+1)!

Ba'zi bir elementar funksiyalar uchun Teylor formulasi.

F(x,y) = 0 tenglamani yechishga tadbiqi.

Bizga F(x,y) = 0 ko'rinishdagi oshkormas funksiya berilgan bo'lsin. Agar bu tenglamadan y yoki x o'zgaruvchini toppish imkoni bo'lsa masala xal bo'lgan bo'ladi, aksincha o'zgaruvchilarga nisbatan yechish imkoni bo'lmasa, uni yechish uchun Teylor formulasidan foydalanamiz. X_1 = Odagi

Teylor formulasini olaylik:

Buni F(x,y) = 0 tenglamaga olib borib, y = a + a,x+ax^2++...F(x,a + a,x+a,x^2 + ...) = 0 algebraik tenglamaga kelamiz. Noma'lum koeffitsiyentlar usulidan foydalanib, koeffitsiyentlarni topamiz va F(x,y) = 0 tenglamaning a,a,a, dastlabki taxminiy yechimini hosil qilamiz. Koeffitsiyentlarning ko'proq topilishi yechimning aniqligini oshirishga olib keladi.

Misol

xy-e + e = 0 tenglamani yeching.

Yechish: y = a + a,x+ax^2+ ni tenglamaga qo'yamiz.

a = 0, x(a,x+ax^2+...)- 1+x+2x^2+)+ [1 + (a,x+a,x^2+)+(ax+x+)+] = 0

yoki

(1+a,)x + (2, 2, +a;)x^2 + (2, 37+,+a,a,+3)x + ... +... = 0

Noma'lum koeffitsiyentlar usuliga ko'ra:

-1+a, =0 1 1 a+a+a,a,+ a-0 6

Bu sistemadan, a, = 1, a, -1, a, = 2, larni topib, y=x-x^2 + 2x^2+ yechimni hosil qilamiz.

F(x) = f(x)dx ni hisoblashga tatbiqi.

Agar f(x) funksiyaga boshlang'ich funksiya toppish mumkin bo'lsa, masala hal, aksincha bo'lsa, Teylor formulasidan foydalanishga to'g'ri keladi.

Misol. sin xdx ni toping. X

sin x Yechish.Ma'lumki, =1- X x^2 3! 5!

U holda sin xdx = X 怪 1- x^2 x* 5! dx=c+x- 313 515 bo'ladi.

Bu integral o'ziga xos nomga ega bo'lib,u integral sinus deyiladi.

Integral sinus nazariy fizikaning ayrim bo'limlarini o'rganishda uchraydi.

XULOSA

Bu yoyilmalarni o'z ichiga oluvchi quyidagi funksiyani ko'raylik:

a-b F(a, b, c, x)=1+ x+ 1.c + a(a + 1)b(b+1) 1.2.c(c+1) a(a+1)(a + 2)b(b+1)(b+2) 1-2-3 c(c+1)(c+2) -x^3 +...

F(a, b, c, x) funksiya uchta o'zgarmas va bitta o'zgaruvchidan iborat bo'lib, a, b va e larga xohlagan 0 dan farqli sonlarni olsak, aniq bir funksiyani beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1.O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.Mirziyoyevning 2020-yil 7- maydagi PQ-4708-sonli qarori.

2.Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 1-tom, Toshkent, <<<O'zbekiston»>, 1994, 1995

3. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H., Matematik analiz, 1 va 2 qismlar, Qarshi, << Nasaf>>, 2003.

4. Yo. Soatov. Oliy matematika. 1-qism Toshkent. 1992.