УДК 518.0

АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ 3-ГО РОДА С ТОЧНОСТЬЮ $O(h^2)$

Имомов Адаш
adashimomov50@gmail.com
к.ф.-м.н., Наманганский государственный университет, Узбекистан

Аннотация: *Рассмотрены дифференциальные задачи с краевыми условиями 3–го рода для обыкновенных , параболических, гиперболических дифференциальных уравнений. Производные первого порядка в краевых условиях аппроксимируются с приближенными производными так, чтобы аппроксимация краевых условий была второго порядка точности. В качестве методов аппроксимации используются 1) метод А.А. Самарского использования само дифференциальное уравнение и формулу Тейлора, 2) аппроксимация с помощью симметричной приближённой производной, 3) аппроксимация несимметричной производной высокой точностьи. С помощью удаления значений функции, возникающих за пределами заданной области производиться их исключения. В результате получаются разностные схемы с трёхдиогональной алгебраических систем уравнений. Для сравнения полученных разностных схем с клаассической разностной схемой с аппроксимацией первого порядка точности краевых условий составлены укрупнённые алгоритмы, которые испольняются в математической системе Mathcad.*

Ключевые слова: *обыкновенное, параболическое, гиперболическое дифференциальное уравнение; краевые условия третьего рода; методы аппроксимация краевых условий с точностью второго порядка; метод А.А. Самарского; метод аппроксимации симетрической разностной производной второго порядка точности; метод аппроксимации несиметрической разностной производной второго порядка точности.*

Введение.

Многие научные и технические задачи приводят к нахождению решений диффереациальных уравнений второго порядка с краевыми условиями третьего рода, которые содержат производные первого порядка на границе области [1-3]. При приближённом решении диффереациальных уравнений разностными схемами дифференциальное уравнение аппроксимируются во внутренных узлах сетки симметричными разностными произодными, и аппроксимируются как минимум второго порядка точности. На границе же области первые производные, входящие в краевые условия аппроксимируются первой порядка точности. Это обстоятельство намного уменшает общую точность разностной схемы. Поэтому были разработаны методы аппроксимации производных в краевых условий с вторым порядком точностьи [1-3]:

1) метод А.А. Самарского аппроксимации первой производной в краевых условий с помощью аппроксимации первой производной из дифференциального уравнения и формулой Тейлора [1,2];

2) аппроксимация первой производной в краевых условиях с помощью симметрической аппроксимацией первой производнной [3,4];

3) метод аппроксимация первой производной в краевых условиях с помощью несимметрической аппроксимацией первой производнной [5-8].

Теоретические основы задачи изложены в [1-4]. Алгоритмы и программы на на Mathcad имеются в [5-8]. Приведённые программы в [5-8] на самом деле являются *укрупнёнымы алгоритмамы*, которые, исполняются математической системой Mathcad. Укрупнённый алгоритм не есть программа на внутреном языке системы Mathcad. *Обычный алгоритм* в алгоритмическом языке сводить нахождение неизвестных с помощью данных задачи на четырье арифметических операций и на стандартные функции алгоритмического языка. *Под укрупнённым алгоритмом мы понимаем последовательность математических формул, и команд математической системы, дающую решение задачи*. Укрупнённый алгоритм нахождение неизвестных с помощью данных задачи сводить также на четырье арифметических операций и на последовательность вес арсенал внутренных функций математической системы такие как, вычисление определителья, возведение в любую степень матрицы, вычисление характеристического уравнения, нахождение корней алгебраических уравнений, вычисление интеграла, численное решения дифференциальных уравнений и т.д.

В настоящей статье построены для краевых задач с третьими краевыми условиями разностные схемы с точностью $O(h^2)$.

1. Методы решения. Укрупнённые алгоритмы и программы.

1. Постановка задачи. Рассматриваются краевые задачи для обыкновенных, параболических, гиперболических дифференциальных уравнений:

1) $u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b,$ (1)

$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = g_1, \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = g_2$; (2)

2) $u_t = u_{xx} + f(x,t), 0 < x < 1, 0 \le t \le T, u(x,0) = u0(x),$

(3)

$\alpha_0 u(a,t) + \alpha_1 u'(a,t) = g_1(t), \beta_0 u(b,t) + \beta_1 u'(b,t) = g_2(t)$; (4)

3) $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t), 0 < x < 1, 0 \le t \le T, u(x,0) = u_0(x), u'_t(x,0) = u_1(x),$ (5)

$\alpha_0 u(a,t) + \alpha_1 u'(a,t) = g_1(t), \beta_0 u(b,t) + \beta_1 u'(b,t) = g_2(t)$. (6)

Для построения разностных схем в области $D = [0,1]*[0,T]$ вводим сетку точек $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_{k,}t_j), x_k = kh, t_j = j\tau, k = 0..m, j = 0..n\}$.

Обозначим $\bar{u}_{kj} = \bar{u}(x_k, t_j)$, $u_{kj} \approx u(x_k, t_j)$ где $\bar{u}(x,$ и $u(x,t)$ точное и приближённое решение краевой задачи.

2. Третья краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения и разностная схема точности O(h).Основные идеи аппроксимации краевых условий с точностью O(h²) мы изложим для задачи (1), (2). В работах [1-2] имеется разностная схема вида **Au=d**, точностьи O(h):

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 (u_1 - u_0)/h = g_1, \qquad (7)$$

$$(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1})/h^2 + (p_k(u_{k+1} - u_{k-1})/2h + qu_k = f_k, k = 1..m-1, \qquad (8)$$

$$\beta_0 u_m + \beta_1 (u_m - u_{m-1})/h = g_2. \qquad (9)$$

Вводя новые обозначения

$$a_0 = \alpha_0 h - \alpha_1, c_0 = \alpha_1, d_0 = hg_1, a_k = 1 - p_k h/2, b_k = q_k h^2 - 2, c_k = 1 + p_k h/2, d_k = h^2 f_k,$$

$$a_m = -\beta_1, b_m = \beta_0 h + \beta_1, d_m = hg_2$$

перепишем СЛАУ (7)-(9) следующим образом:

$$b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_1, \qquad (7')$$

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k, k = 1..m-1,, \qquad (8')$$

$$a_m u_{m-1} + b_m u_m = d_2. \qquad (9')$$

где $p_k = p(x_k), q_k = q(x_k), f_k = f(x_k), u_k \approx u(x_k), k = 0..m$.

Уравнения (7), (9) аппроксимируют краевые условие с точностью O(h), уравнения (8) аппроксимируют дифференциальное уравнение с точностью O(h²). Нашей задачей является запись (7), (9) с точностью O(h²).

Векторная-матричная запись (7)-(9) имеет следующий вид:

$$A := \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & . & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & a_m & b_m \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_0 \\ \\ \\ \\ \\ u_m \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_0 \\ \\ \\ \\ \\ d_m \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Решим сначала краевую задачу 1-го рода схемой второго порядка точности краевых условий и видим лучшую точность:

$$c := 1 \quad d := 2 \quad n := 10 \qquad h := \frac{d-c}{n} \quad i := 0..n \quad x_i := c + i \cdot h$$

$$\alpha_0 := 1 \quad \alpha_1 := 0 \quad \gamma_1 := 1 \quad \beta_0 := 1 \quad \beta_1 := 0 \quad \gamma_2 := 0.25 \qquad ut(x) := \frac{1}{x^2} \quad ut_i := ut(x_i)$$

$$p(x) := x^2 \quad q(x) := -x \quad p_i := p(x_i) \quad q_i := q(x_i) \quad f(x) := \left(\frac{6 - 3 \cdot x^3}{x^4}\right) \quad f_i := f(x_i)$$

$$i := 0..n \quad a_i := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad b_i := q_i \cdot h^2 - 2 \quad c_i := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2}$$

$$i := 0 \quad A_{0,0} := 2 \cdot h \cdot \alpha_0 \cdot a_0 + b_0 \cdot \alpha_1 \quad A_{0,1} := \alpha_1 \cdot a_0 + \alpha_1 \cdot c_0 \quad D_0 := 2 \cdot h \cdot \gamma_1 \cdot a_0 + \alpha_1 \cdot h^2 \cdot f_0$$

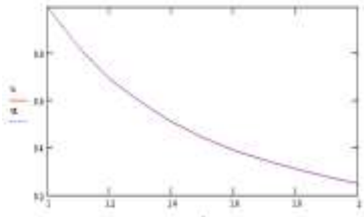
$$i := 1..n-1 \quad A_{i,i-1} := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad A_{i,i} := q_i \cdot h^2 - 2 \quad A_{i,i+1} := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2} \quad D_i := h^2 \cdot f_i$$

$$i := n \quad A_{n,n-1} := \beta_1 \cdot (c_n + a_n) \quad A_{n,n} := -2 \cdot h \cdot \beta_0 \cdot c_n + \beta_1 \cdot b_n \quad D_n := -2 \cdot h \cdot \gamma_2 \cdot c_n + \beta_1 \cdot h^2 \cdot f_n$$

$$u := A^{-1} \cdot D \quad i := 0..n \quad C_{0,i} := i \quad C_{1,i} := ut_i \quad C_{2,i} := u_i$$

C =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.346	0.3086	0.277	0.25
2	1	0.8267	0.6947	0.5918	0.5102	0.4443	0.3905	0.3459	0.3085	0.2769	0.25



Решим теперь краевую задачу 3-го тура схемой первого порядка точности:

C =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.346	0.3086	0.277	0.25
2	0.7393	0.6175	0.529	0.4619	0.4089	0.3653	0.3281	0.2955	0.2663	0.24	0.2162

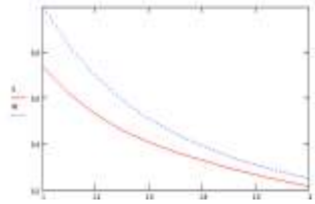


Рис. 1. Решение разностной схем (10). Видна худшая точность.

3. Метод А.А. Самарского [1-2]. Использование формулы Тейлора и дифференциальное уравнение (1). Для левого краевого условия имеем:

$\bar{u}_1 = \bar{u}(x_0 + h) = \bar{u}_0 + \bar{u}_0{}' h + 0.5\bar{u}_0'' h^2 + 0(h^3)$.

Тогда получаем: $u_1 = u(x_0 + h) = u_0 + u_0{}' h + 0.5 u_0'' h^2$. Так как $\bar{u}_0{}'' = f_0 - q_0\bar{u}_0 - p_0\bar{u}_0{}'$, то исключим $u_0{}''$ из предыдущего равенства:

$$u_0' = \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(f_0 - p_0 u_0' - q_0 u_0) + O(h^2) \Rightarrow$$

$$(1 - \frac{p_0 h}{2}) u_0' = \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(f_0 - q_0 u_0) + O(h^2) \Rightarrow$$

$$u_0' = \frac{2}{2 - p_0 h}\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{2}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 u_0) + O(h^2).$$

и подставляя найденное значение в левое краевое условие имеем:

$$\frac{2}{2 - p_0 h}\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{2}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 u_0) + \alpha_0 u_0 = g_1 + O(h^2),$$

$$\tilde{b}_0 u_0 + \tilde{c}_0 u_1 = \tilde{d}_0, \tilde{b}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2 - p_0 h}(q_0 h - \frac{2}{h}), \tilde{c}_0 = \frac{2\alpha_1}{h(2 - p_0 h)}, \tilde{d}_0 = g_1 + \frac{\alpha_1 h f_0}{2 - p_0 h} \qquad (11)$$

Аналогично, для правого краевого условия получаем:

$$u_{m-1} = u(x_m - h) = u_m - h u_m' + \frac{h^2}{2} u_m'' + 0(h^3), \bar{u}_m'' = f_m - q_m \bar{u}_m - p_m \bar{u}_m'.$$

Подстановка определяемого производной u'_m в правое краевое условие нас приводить к результатам:

$$\tilde{a}_m u_{m-1} + \tilde{b}_m u_m = \tilde{d}_m, \tilde{a}_m = -\frac{2\beta_1}{h(2+p_m h)}, \tilde{b}_m = \beta_0 + \frac{\beta_1}{2+p_m h}\left(\frac{2}{h} - hq_m\right), \tilde{d}_m = g_2 - \frac{\beta_1 h f_m}{2+p_m h}$$

(12)

Промежуточные уравнения (8) при этом не меняются, и имеем $\tilde{A}u = \tilde{d}$, где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{c}_0 & . & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & \tilde{a}_m & \tilde{b}_m \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_0 \\ \\ \\ u_m \end{bmatrix}, \tilde{d} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_0 \\ d_1 \\ \\ d_{m-1} \\ \tilde{d}_m \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Метод А.А. Самарского применён в [1,2] для дифференциальных уравнений (1)-(5). Метод А.А. Самарского даёт хорошие результаты:

$c := 1 \quad d := 2 \quad n := 10 \quad h := \frac{d-c}{n} \quad i := 0..n \quad x_i := c + i \cdot h$

$\alpha_0 := 3 \quad \alpha_1 := 1 \quad \gamma_1 := 1 \quad \beta_0 := 1 \quad \beta_1 := 3 \quad \gamma_2 := -0.5 \quad ut(x) := \frac{1}{x^2} \quad ut_i := ut(x_i)$

$p(x) := x^2 \quad q(x) := -x \quad p_i := p(x_i) \quad q_i := q(x_i) \quad f(x) := \left(\frac{6 - 3 \cdot x^3}{x^4}\right) \quad f_i := f(x_i)$

$i := 1..n-1 \quad a_i := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad b_i := q_i \cdot h^2 - 2 \quad c_i := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2}$

$i := 0 \quad A_{0,0} := \alpha_0 + \left[\frac{\alpha_1}{(2 - p_0 \cdot h)}\right] \cdot \left(q_0 \cdot h - \frac{2}{h}\right) \quad A_{0,1} := \frac{(\alpha_1 \cdot 2)}{[h \cdot (2 - p_0 \cdot h)]} \quad D_0 := \gamma_1 + \frac{(f_0 \cdot h \cdot \alpha_1)}{2 - p_0 \cdot h}$

$i := 1..n-1 \quad A_{i,i-1} := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad A_{i,i} := q_i \cdot h^2 - 2 \quad A_{i,i+1} := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2} \quad D_i := h^2 \cdot f_i$

$A_{n,n-1} := \frac{-(\beta_1 \cdot 2)}{h \cdot (2 + p_n \cdot h)} \quad A_{n,n} := \beta_0 + \frac{\beta_1 \cdot \left(-h \cdot q_n + \frac{2}{h}\right)}{2 + p_n \cdot h} \quad D_n := \gamma_2 - \frac{f_n \cdot h \cdot \beta_1}{2 + p_n \cdot h}$

$u := A^{-1} \cdot D \quad i := 0..n \quad C_{0,i} := i \quad C_{1,i} := ut_i \quad C_{2,i} := u_i$

C =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.346	0.3086	0.277	0.25
2	1.0356	0.8557	0.718	0.6106	0.5253	0.4566	0.4007	0.3546	0.3163	0.2842	0.2569

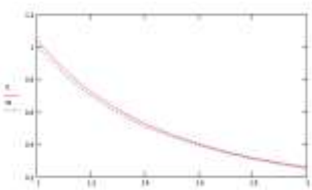


Рис 2. Метод А.А. Самарского даёт хорошие результаты.

4. Аппроксимация граничных производных симметричной разностной производной. Расширим сетку точек двумя дополнительными узлами $x_{-1} = x_0 - h, x_{m+1} = x_m + h$ и аппроксимируем краевые условия так:

$$\alpha_0 u_0 + (u_1 - u_{-1})/2h = g_1, \qquad (14)$$

$$\beta_0 u_m + (u_{m+1} - u_{m-1})/2h = g_2. \qquad (15)$$

К этим уравнениям прибавляем два уравнения из (8) с номерами **k=0, k=m:**

$$\alpha_0 u_0 + (u_1 - u_{-1})/2h = g_1, a_0 u_{-1} + b_0 u_0 + c_0 u_1 = d_0,$$

$$\beta_0 u_m + (u_{m+1} - u_{m-1})/2h = g_2, a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = d_m.$$

Из этих уравнений для **k=0, k=m** исключаем неизвестные u_{-1}, u_{m+1} и имеем:

$$\tilde{b}_0 u_0 + \tilde{c}_0 u_1 = \tilde{d}_0, \qquad \tilde{b}_0 = 2h\alpha_0 a_0 + \alpha_1 b_0, \tilde{c}_0 = \alpha_1(a_0 + c_0), \tilde{d}_0 = \alpha_1 d_0 + 2ha_0 g_1,$$
(16)

$$\tilde{a}_m u_{m-1} + \tilde{b}_m u_m = \tilde{d}_m, \qquad \tilde{a}_m = \beta_1(a_m + b_m), \tilde{b}_m = -2h\beta_0 c_m + \beta_1 b_m, \tilde{d}_m = \beta_1 d_m - 2hc_m g_2.$$
(17)

В результате опять получаем систему линейных уравнений $\tilde{A}u = \tilde{d}$: с изменёнными (16,17). В формулах (16), (17) нет операции деления, и они наиболее простые. Для решения этой разностной схемы составим укрупнённый алгритм в **Mathcad:**

$c := 1 \quad d := 2 \quad n := 10 \quad h := \dfrac{d-c}{n} \quad i := 0..n \quad x_i := c + i \cdot h$

$\alpha_0 := 1 \quad \alpha_1 := 0 \quad \gamma_1 := 1 \quad \beta_0 := 1 \quad \beta_1 := 0 \quad \gamma_2 := 0.25 \quad ut(x) := \dfrac{1}{x^2} \quad ut_i := ut(x_i)$

$p(x) := x^2 \quad q(x) := -x \quad p_i := p(x_i) \quad q_i := q(x_i) \quad f(x) := \left(\dfrac{6 - 3 \cdot x^3}{x^4}\right) \quad f_i := f(x_i)$

$i := 0..n \quad a_i := 1 - p_i \cdot \dfrac{h}{2} \quad b_i := q_i \cdot h^2 - 2 \quad c_i := 1 + p_i \cdot \dfrac{h}{2}$

$i := 0 \quad A_{0,0} := 2 \cdot h \cdot \alpha_0 \cdot a_0 + b_0 \cdot \alpha_1 \quad A_{0,1} := \alpha_1 \cdot a_0 + \alpha_1 \cdot c_0 \quad D_0 := 2 \cdot h \cdot \gamma_1 \cdot a_0 + \alpha_1 \cdot h^2 \cdot f_0$

$i := 1..n-1 \quad A_{i,i-1} := 1 - p_i \cdot \dfrac{h}{2} \quad A_{i,i} := q_i \cdot h^2 - 2 \quad A_{i,i+1} := 1 + p_i \cdot \dfrac{h}{2} \quad D_i := h^2 \cdot f_i$

$i := n \quad A_{n,n-1} := \beta_1 \cdot (c_n + a_n) \quad A_{n,n} := -2 \cdot h \cdot \beta_0 \cdot c_n + \beta_1 \cdot b_n \quad D_n := -2 \cdot h \cdot \gamma_2 \cdot c_n + \beta_1 \cdot h^2 \cdot f_n$

$u := A^{-1} \cdot D \quad i := 0..n \quad C_{0,i} := i \quad C_{1,i} := ut_i \quad C_{2,i} := u_i$

C =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.346	0.3086	0.277	0.25
2	0.9805	0.8114	0.6828	0.5829	0.5036	0.4396	0.3871	0.3435	0.3069	0.2759	0.2493

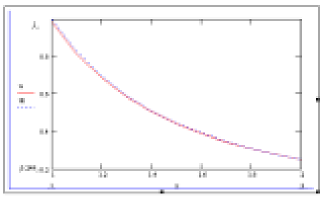


Рис.2. Метод симметрической аппроксимации даёт хороший результат

5. Аппроксимация граничных производных несимметрической формулой производных.

Для краевых условий можно использовать несимметричные приближенные формулы производных:

$$u_0' = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + 0(h^2), u_m' = \frac{u_{m-2} - 4u_1 + 3u_2}{2h} + 0(h^2) \qquad (18)$$

Но при этом, в СЛАУ $\tilde{A}u = \tilde{d}$ матрица A перестаёт быть трёхдиогнальной, так как уравнения с номерами k=0, k=m будет содержат по три неизвестных. Если из уравнений с номерами k=0, k=m и и из краевых условий исключать u_2, u_{m-2} , то опять получим трёхдиогнальной системы уравнений $\tilde{A}u = \tilde{d}$, где

$$\tilde{b}_0 = 2hc_0 - \alpha_1(3c_1 - a_1), \tilde{c}_0 = \alpha_1(4c_1 - b_1), \tilde{d}_0 = 2hc_1 g_1 + \alpha_1 d_2, \qquad (19)$$

$$\tilde{a}_m = -\beta_1(b_{m-1} + a_{m-1}), \tilde{b}_m = 2h\beta_0 a_{m-1} - \beta_1 c_{m-1} + 3\beta_1 d_{m-1}, \tilde{d}_m = 2ha_{m-1} g_2 - \beta_1 d_{m-1}. \qquad (20)$$

Проведенные эксперименты [3] с разностными схемами, показывают хорошую точность. Если потребуется вместо формул (18) можно также использовать другие формулы дифференцирования более высокой точности. В этом случае меняются только уравнения с номерами 0 и m.

$c := 1 \quad d := 2 \quad n := 10 \qquad h := \frac{d - c}{n} \quad i := 0..n \quad x_i := c + i \cdot h$

$\alpha_0 := 3 \quad \alpha_1 := 1 \quad \gamma_1 := 1 \quad \beta_0 := 1 \quad \beta_1 := 3 \quad \gamma_2 := -0.5 \qquad ut(x) := \frac{1}{x^2} \quad ut_i := ut(x_i)$

$p(x) := x^2 \quad q(x) := -x \quad p_i := p(x_i) \quad q_i := q(x_i) \quad f(x) := \left(\frac{6 - 3 \cdot x^3}{x^4}\right) \quad f_i := f(x_i)$

$i := 1..n-1 \quad a_i := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad b_i := q_i \cdot h^2 - 2 \quad c_i := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2}$

$i := 0 \quad A_{0,0} := 2 \cdot h \cdot \alpha_0 - \alpha_1 \cdot 3 \quad A_{0,1} := \alpha_1 \cdot 4 \quad A_{0,2} := -\alpha_1 \quad D_0 := h \cdot \gamma_1 \cdot 2$

$i := 1..n-1 \quad A_{i,i-1} := 1 - p_i \cdot \frac{h}{2} \quad A_{i,i} := q_i \cdot h^2 - 2 \quad A_{i,i+1} := 1 + p_i \cdot \frac{h}{2} \quad D_i := h^2 \cdot f_i$

$i := n \quad A_{n,n-2} := \beta_1 \quad A_{n,n-1} := -4 \cdot \beta_1 \quad A_{n,n} := \beta_0 \cdot h \cdot 2 + \beta_1 \cdot 3 \quad D_n := h \cdot \gamma_2 \cdot 2$

$u := A^{-1} \cdot D \quad i := 0..n \quad C_{0,i} := i \quad C_{1,i} := ut_i \quad C_{2,i} := u_i$

C =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.346	0.3086	0.277	0.25
2	0.9423	0.7794	0.6561	0.5604	0.4844	0.4229	0.3721	0.3297	0.2937	0.2629	0.2363

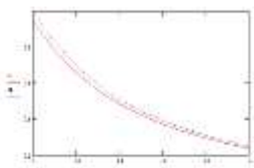


Рис 3. Метод несимметрической аппроксимации даёт неплохой результат

6. Случай параболического дифференциального уравнения.

6.1.Метод Самарского. Выполним следующие преобразования:

$$u_1^{k+1} = u(0 + h, t_{k+1}) = u_0^{k+1} + h(u_x)_0^{k+1} + (h^2/2)(u_{xx})_0^{k+1} + O(h^3),$$
$$u_{n-1}^{k+1} = u(1 - h, t_{k+1}) = u_n^{k+1} - h(u_x)_n^{k+1} + (h^2/2)(u_{xx})_n^{k+1} + O(h^3).$$

Подставляем сюда равенство, которое получается из дифференциального уравнения: $(u_{xx})_{j=0,n}^{k+1} = (u_t - f)_{j=0,n}^{k+1}$,

$$(u_x)_0^{k+1} = \frac{1}{h}(u_1^{k+1} - u_0^{k+1}) - \frac{h}{2}(u_t - f)_0^{k+1} + O(h^2),$$
$$(u_x)_n^{k+1} = \frac{1}{h}(u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}) + \frac{h}{2}(u_t - f)_n^{k+1} + O(h^2).$$

Отсюда имеем

$$(u_t)_0^{k+1} = (u_0^{k+1} - u_0^k)/\tau + 0(\tau), (u_t)_0^{k+1} = (u_n^{k+1} - u_n^k)/\tau + 0(\tau),$$

и подставляем в краевые условия:

$$\alpha_0 u_0^{k+1} + \alpha_1[\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} - \frac{h}{2}(\frac{u_0^{k+1} - u_0^k}{\tau} - f_0^{k+1})] = g1_0^{k+1} + O(\tau + h^2),$$
$$\beta_0 u_n^{k+1} + \beta_1[\frac{u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} + \frac{h}{2}(\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} - f_n^{k+1})] = g2_n^{k+1} + O(\tau + h^2),$$

Таким образом, для краевых условий найдем соотношения:

$$[\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{h} - \frac{\alpha_1 h}{2\tau}]u_0^{k+1} + [\frac{\alpha_1}{h}]u_1^{k+1} = g1_0^{k+1} - \frac{\alpha_1 h}{2\tau}u_0^k - \frac{\alpha_1 h}{2} f_0^{k+1} + O(\tau + h^2),$$
$$[-\frac{\beta_1}{h}]u_{n-1}^{k+1} + [\beta_0 + \frac{\beta_1}{h} + \frac{\beta_1 h}{2\tau}]u_n^{k+1} = g2_n^{k+1} - \frac{\beta_1 h}{2\tau}u_n^k + \frac{\beta_1 h}{2} f_n^{k+1} + O(\tau + h^2),$$

Вводя обозначения разностную схему записываем в виде:

$$b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0 + O(\tau + h^2), i = 0$$
$$a_i u_{i-1}^{k+1} + b_i u_i^{k+1} + c_i u_{i+1}^{k+1} = d_i + O(\tau + h^2), i = 1..n-1, .$$
$$a_n u_{n-1}^{k+1} + b_n u_n^{k+1} = d_n + O(\tau + h^2), i = n$$

Отбрасывая бесконечное малые члены получаем разностную схему Самарского:

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{d} = \begin{cases} b_0 u_0^{k+1} + c_0 u_1^{k+1} = d_0, i = 0 \\ a_i u_{i-1}^{k+1} + b_i u_i^{k+1} + c_i u_{i+1}^{k+1} = d_i, i = 1..n-1, \\ a_n u_{n-1}^{k+1} + b_n u_n^{k+1} = d_n, i = n \end{cases}$$

6.2. Метод симметрической аппроксимации краевых условий. Рассмотрим уравнения:

$$\alpha_0 u(a,t) + \alpha_1 u'(a,t) = g_1(t), \beta_0 u(b,t) + \beta_1 u'(b,t) = g_2(t),$$
$$\frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\tau} = \frac{u_{k-1}^{j+1} - 2u_k^{j+1} + u_{k+1}^{j+1}}{h^2} + f_k^{j+1}, k = 1..m-1, j = 0.n-1. \quad (24)$$

Аппроксимируем краевые условия симметрической разностной производной второго порядка точности:

$$\alpha_0 u_0^{j+1} + \alpha_1(u_1^{j+1} - u_{-1}^{j+1})/2h = g_1^{j+1}, \beta_0 u_m^{j+1} + \alpha_1(u_{m+1}^{j+1} - u_{m-1}^{j+1})/2h = g_2^{j+1}, \quad (25)$$
$$u_{-1}^{j+1} = \alpha^{-1}[2h\alpha_0 u + \alpha_1 u_1^{j+1} - 2hg_1^{j+1}], u_{m+1}^{j+1} = \beta^{-1}[2h\beta_0 u + \beta_1 u_1^{j+1} - 2hg_2^{j+1}]. \quad (26)$$

Из уравнений (24) для k=0, k=m) с помощью (26) исключаем неизвестные $u_{-1}^{j+1}, u_{m+1}^{j+1}$:

$$(-2hr\alpha_0 + \alpha_1(1+2r))u_0^{j+1} - 2r\alpha_1 u_1^{j+1} = \alpha_1(u_0^j + \tau f_0^{j+1}) + 2rhg_1^{j+1}, \quad (26)$$
$$-2r\beta_1 u_{m-1}^{j+1} + (2hr\beta_0 + \beta_1(1+2r))u_m^{j+1} = \beta_1(u_m^j + \tau f_m^{j+1}) - 2rhg_2^{j+1}. \quad (27)$$

Остальные уравнения (24) не меняются, мы опять получим СЛАУ вида (13).

7. Случай гиперболического дифференциального уравнения.

Возьмём опять краевые условия (6) и чистую неявную разностную схему:

$$\frac{u_k^{j-1}-2u_k^j+u_k^{j+1}}{\tau^2}=\frac{u_{k-1}^{j+1}-2u_k^{j+1}+u_{k+1}^{j+1}}{h^2}+f_k^{j+1}, k=1..m-1,\ j=0.n-1. \qquad (28)$$

Опять аппроксимируем краевые условия симметрической разностной производной второго порядка точности (25). Из уравнений (28 для k=0, k=m) с помощью (26) исключаем неизвестные $u_{-1}^{j+1}, u_{m+1}^{j+1}$:

$$(2hr\alpha_0-\alpha_1-2r\alpha_1)u_0^{j+1}+2r\alpha_1u_1^{j+1}=\alpha_1(2u_0^j-u_0^{j-1}+\tau^2 f_0^{j+1})+2rhg_1^{j+1}, \qquad (30)$$

$$2r\beta_1u_{m-1}^{j+1}-(2hr\beta_0+\beta_1+2r\beta_1)u_m^{j+1}=\beta_1(2u_m^j-u_m^{j-1}+\tau^2 f_m^{j+1})+2rhg_2^{j+1}. \qquad (31)$$

Остальные уравнения (28) не меняются, мы опять получим СЛАУ вида (10).

8. Обсуждение результатов.

В работе рассмотрены аппроксимация третьей краевой задачи для обыкновенных, праболических и гиперболических дифференциальных уравнений разностными схемами. Исследованы три способа улучшения аппроксимации краевых условий: 1) метод А.А. Самарского; 2) метод симметрической разностной производной; 3) метод несимметрической разностной производной. Во всех случаях получены разностные схемы с трёхдиогональной матрицей. Составлены укрупнённые алгоритмы в математической системе Mathcad, приближённые решения получются в виде таблицы значений точного решения и приближённого решения.

Классический способ замены поизводной в краевых условий разностной производной первого порядка точности даёт хорошие результаты только для первой краевой задачей. Лучшие результаты даёт метод симметрической разностной производной в краевых условиях:

узлы, метод	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
точное	1	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.3460	0.3086	0.2770	0.25
Метод 0(h)	0.7393	0.6175	0.5290	0.4619	0.4089	0.3653	0.3291	0.2955	0.2663	0.2400	0.2162
Мето. Самарс-кого	1.0356	0.8557	0.7190	0.6106	0.5253	0.4566	0.4007	0.3546	0.3163	0.2842	0.2569
Симметрич. аппр.	0.9865	0.8114	0.6828	0.5829	0.5036	0.4396	0.3871	0.3435	0.3069	0.2759	0.2493
Несим мет. аппр.	0.9423	0.7794	0.6561	0.5604	0.4844	0.4229	0.3721	0.3297	0.2937	0.2629	0.2363

Заключение.

Рассмотренные три способа улучшения аппроксимации краевых условий: метод А.А. Самарского, метод симметрической разностной производной, метод несимметрической разностной производной в краевых условий. Во всех случаях получены разностные схемы с трёхдиогональной матрицей. Составлены укрупнённые алгоритмы в математической системе Mathcad, приближённые решения получются в виде таблицы значений точного решения и приближённого решения, которые испольняются системой Mathcad . Экспериметы показывают хорошую точность методов Самарского и аппроксимации симметрической разностной производной в краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, -656 с.
2. Формалев В.Ф. Резников Д.Л. Численные методы. М. Физмат лит, 2004. -400 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. -512 с.
4. Зеленский К.Х., Игнатенько В.И., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики. Киев, 1999. -352 с.
5. Имомов А., Иномиддинов С., ОДТ ва ПДТ, 3 тур чегара шартлар учун ЧАС қуриш. Эксперементлар. Нам ДУ ахборотномаси, Махсус сон. 2020 й 38-45 б.
6. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ПДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Нам ДУ ахборотномаси, 2022 й №4 сон 28-36 б.
7. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ОДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Нам ДУ ахборотномаси, 2022 й №2 сон 51-6 б.
8. Имомов А., Иномиддинов С., Настинов С. ГДТ 3 тур чегара масалага айирмали схема. Germany International Conference, 2022. 279-284 с.