2 – SON / 2022 - YIL / 15 - OKTYABR

TEHNIKA UNIVERSITETLARIDA MUTAHASIS FANLARIGA BOG'LIQ O'QITISH METODIKASI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING NORMAL SISTEMALARI.

Bahtiyorjonov Omadjon

andion davlat pedagogika instituti

aniq va tabiiy fanlar fakulteti

fizika va astronomiya yo'nalishi

2-bosqich talabasi

Anatatsiya: *Ko'pgina amaliy masalalarda qaralayotgan hodisa yoki jarayonni tavsiflash uchun bir argumentning bir nechta funksiyasi talab qilinadi. Bu funksiyalarni izlash bir nechta differensial tenglamalarga olib kelishi mumkin va bu tenglamalar sistema tashkil etadi.*

Kalit so'zlar: *birinchi tartibli, normal sistema, yo'qotish usuli, o'zgarmas koiffitsiyentli, differensial tenglamalar, funksiya, ikkinchi tartibli, Koshi masalasi.*

Ko'pgina amaliy masalalarda qaralayotgan hodisa yoki jarayonni tavsiflash uchun bir argumentning bir nechta funksiyasi talab qilinadi. Bu funksiyalarni izlash bir nechta differensial tenglamalarga olib kelishi mumkin va bu tenglamalar sistema tashkil etadi.

Biz erkli o'zgaruvchining noma'lum $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalariga nisbatan maxsus ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini o'rganish bilan cheklanamiz. Bu sistema ushbu

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

ko'rinishga ega bo'lib, differensial tenglamalarning ***normal sistema***si deyiladi.

Normal sistemaning barcha tenglamalari birinchi tartibli tenglamalar bo'lib, ularning o'ng tomonlari hosilalarga bog'liq bo'lmaydi.

(1) sistemaning ***yechimi*** deb bu sistemaning har bir tenglamasini qanoatlantiradigan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar to'plamiga aytiladi.

(1) sistemaning

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}, \;\; y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0} \tag{2}$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha xususiy yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

(1) normal sistema uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi ushbu teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. Agar (1) normal sistema tenglamalarining o'ng tomonlari o'zlarining xususiy hosilalari bilan birgalikda $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ qiymatlarning atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda (1) normal sistemaning

$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10},\ y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0}$ shartnlari qanoatlantiruvchi

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

n ta ixtiyoriy $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarga bog'liq bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

funksiyalar sistemasiga (1) normal sistemaning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

Bu yechim (1) sistemani $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarning istalgan qiymatlarida ayniyatga aylantiradi va u (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlansa Koshi masalasining yechimi bo'ladi.

(1) sistemaning umumiy yechimidan ixtiyoriy o'zgarmasning tayin qiymatida hosil bo'ladigan har qanday yechim ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umuman aytganda, birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal bo'lmagan sistemalari (tayin shartlar asosida) va yuqori tartibli differensial tenglamalarning sistemalari (yangi funksiyalar kiritish orqali) normal sistemaga keltirilishi mumkin.

1-misol. Sistemani normal sistemaga keltiring:

$$\begin{cases} 3y_1' - y_2' + 2y_1 = \cos x, \\ y_1' + y_2 = \sin x \end{cases}$$

Y e c h i s h. Ikkinchi tenglamadan: $y_1' = -y_2 + \sin x$. Bu ifodani birinchi tenglamaga qo'yamiz va uni y_2' nisbatan yechamiz:

$$y_2' = 3\sin x - \cos x + 2y_1 - 3y_2.$$

Demak,

$$\begin{cases} y_1' = \sin x - y_2, \\ y_2' = 3\sin x - \cos x + 2y_1 - 3y_2. \end{cases}$$

2-misol. Sistemani normal sistemaga keltiring:

$$\begin{cases} y_1'' + y_2' + y_1 = \ln x, \\ y_1' + y_2'' = 3 \end{cases}$$

Y e c h i s h. Qo'shimcha funksiyalar kiritamiz: $y_3 = y_1',\ y_4 = y_2'$.

U holda berilgan sistemadan

$$\begin{cases} y_3' + y_4 + y_1 = \ln x, \\ y_3 + y_4' = 3 \end{cases}$$

kelib chiqadi. Natijada

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = \ln x - y_4 - y_1, \\ y_4' = 3 - y_3 \end{cases}$$

normal sistema hosil bo'ladi.

NORMAL SISTEMALARNI YECHISHNING YO'QOTISH USULI

Yo'qotish usulida n ta noma'lum funksiyalarga nisbatan n ta tenglamadan iborat (1) sistmani yechish bir noma'lumga nisbatan bitta $n-$tartibli differentsial tenglamani yechishga keltiriladi. Bu usulning mohiyati (1) sistemadan noma'lum $y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ funksiyalarni ketma-ket yo'qotishdan iborat.

Buning uchun dastlab (1) sistemaning birinchi tenglamasini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n'.$$

Sistemaning boshqa tenglamalarini inobatga olib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n.$$

Ifodaning o'ng tomoni $x, y_1, y_2,..., y_n$ larning funksiyalari bo'lgani uchun uni $y_1'' = F_1(x, y_1, y_2,..., y_n)$ ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi ifodani x bo'yicha differensiallab, yuqoridagi singari $y_1''' = F_2(x, y_1, y_2,..., y_n)$ ni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, $y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2,..., y_n)$ tenglamani hosil qilamiz.

Shunday qilib, n ta differensial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ y_1'' = F_1(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2,..., y_n). \end{cases} \tag{3}$$

Bu sistemaning birinchi $(n-1)$ ta tenglamasidan $(n-1)$ ta $y_2, y_3,..., y_n$ funksiyalarni $x, y_1, y_1', y_1'',..., y_1^{(n-1)}$ o'zgaruvchilar orqali ifodalash mumkin. Bu ifodalarni (3) sistemaning oxirgi tenglamasiga qo'yib, noma'lum y_1 funksiyaga nisbatan bitta $n-$tartibli differentsial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y_1^{(n)} = \Phi(x, y_1, y_1',..., y_1^{(n-1)}).$$

Bu tenglamani yechib, y_1 ni topamiz:

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,C_2,...,C_n).$$

Qolgan funksiyalarni topish uchun y_1 va uning hosilalarini $y_2,y_3,...,y_n$ larning ifodalariga qo'yamiz. Natijada quyidagi funksiyalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x,C_1,C_2,...,C_n), \\ y_2=\varphi_2(x,C_1,C_2,...,C_n), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ y_n=\varphi_n(x,C_1,C_2,...,C_n) \end{cases}$$

Bu sistema (1) normal sistemaning izlanayotgan yechimini aniqlaydi.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1'=y_1+y_2-\cos x, \\ y_2'=-2y_1-y_2+\sin x+\cos x \end{cases}$$

tenglamalar sistmasining umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. Sistemaning birinchi tenglamasini differensiallaymiz:

$$y_1''=y_1'+y_2'+\sin x.$$

Bu tenglikka y_2'ning sistema ikkinchi tenglamasidagi ifodasini qo'yamiz:

$$y_1''=y_1'-2y_1-y_2+2\sin x+\cos x.$$

Sistemaning birinchi tenglamasidan y_1 ni topib, bu tenglamaga qo'yamiz:

$$y_1''=-y_1+2\sin x \quad \text{yoki} \quad y_1''+y_1=2\sin x.$$

Hosil bo'lgan ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan tenglama bir jinsli qismining yechimi $y_1=C_1\cos x+C_2\sin x.$

Uning xususiy yechimini $Y_1=x(A\cos x+B\sin x)$ ko'rinishda izlaymiz.

Bundan,

$$Y_1'=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x, \quad Y_1''=(2B-Ax)\cos x-(2A+Bx)\sin x.$$

Y_1' va Y_1'' ni $y_1''+y_1=2\sin x$ tenglamaga qo'yib topamiz: $A=-1,\ B=0.$

Demak, $Y_1=-x\cos x$ va $y_1=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x.$

Bundan $y_1'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\cos x+x\sin x.$

Sistemaning birinchi tenglamasidan topamiz: $y_2=y_1'-y_1+\cos x.$

Bu ifodaga y_1 va y_1' larning ifodalarini qo'ysak,

$$y_2=(C_2-C_1)\cos x-(C_1+C_2)\sin x+x(\cos x+\sin x).$$

Shunday qilib berilgan sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} y_1=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x, \\ y_2=(C_2-C_1)\cos x-(C_1+C_2)\sin x+x(\cos x+\sin x). \end{cases}$$

ADABIYOTLAR:

1. *1*.Salohiddinov M.S.,Nasriddinov G'.N. Oddiy differensial tenglamalar. T: 1994
2. 2.Jo'rayev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-q. T.: "O'zbekiston". 1999
3. 3.HikmatovA.G., Toshmatov O'.T., Karasheva K., Matematik analizdan mashq va masalalar to'plami. T.:1987
4. 4.Берман Г.Н., Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука 1985
5. 5.Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциаьним уравнениям. Ижевск: НИЦ"Регулярная и хаотическая динамика". 2000.