7 – TOM 3 – SON / 2024 - YIL / 15 - MART

INVALYUTSIYALI BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALA

Omonova Adiba Nu'monjon qizi
Farg`ona davlat universiteti talabasi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada invalyutsiyali birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi o`rganilgan.*

ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Аннотация. *В данной статье исследуется задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией.*

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A FIRSTORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION

Annotation. *This article studies the Cauchy problem for a first-order differential equation with involution.*

Kalit so`zlar: *birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi.*
Ключевые слова: *дифференциального уравнения первого порядка, задачи Коши.*
Keywords: *differential equation first-order, Cauchy problem.*

Kirish. Oxirgi yillarda bir nechta xil argumentli noma'lum funksiya qatnashgan differensial tenglamalar bilan shug`ullanishga bo'lgan qiziqish ortib bormoqda. Bunga sabab ko'plab issiqlik tarqalish va diffuziya jarayonlarini matematik modelini tuzish funksiyani biror qiymati qatnashgan differensial tenglama uchun qo`yiladigan masalalarga keltiriladi. Odatda, bunday turdagi tenglamalar kechikuvchi argumentli yoki invalutsiyalangan differensial tenglama deb yuritiladi. Shu sababdan biz ushbu ishda invalutsiyalangan birinchi tartibli differensial tenglama uchun boshlang`ich masalani o`rganamiz.

Masalalarni qoyilishi va tadqiqoti.

$(1,b)$ oraliqda ushbu

(1) $$y'(x)=\lambda y\left(\frac{1}{x}\right)$$

invalutsiyalangan differensial tenglamani qaraylik, bu yerda $y(\cdot)$ - noma'lum funksiya, b, λ - berilgan haqiqiy son.

Ko`rish qiyin emaski $\lambda=0$ bo`lgan holda (1) tenglama invalutsiyalangan bo`lmaydi, shu sababdan biz ushbu ishda $\lambda\neq0$ bo`lgan holini qaraymiz.

K **masala.** (1) tenglamani va

(2) $$y(1)=A$$

boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi shunday $y(\cdot)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ funksiya topilsin, bu yerda A berilgan haqiqiy son.

(1) tenglamadagi x ni $1/x$ ga almashtirib,

(3) $$y'\left(\frac{1}{x}\right)=\lambda y(x)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Endi (1) tenglamani bir marta differensiallab,

(4) $$y''(x)=-\frac{\lambda}{x^2}y'\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(3) tenglamani $(-\lambda)/x^2$ ga ko`paytirib, (4) tenglamaga qo`shib,

(5) $$x^2y''(x)+\lambda^2y(x)=0,$$

tenglamani hosil qilamiz.

Ma'lumki (5) tenglama Eyler tenglamasi bo`lib, uning umumiy yechimi $(4l^2 - 1)$ ifodaning qiymatiga bog`liq bo`lgani uchun quyidagi hollarni qaraymiz:

1- hol. $|\lambda|<1/2$ bo`lsin. U holda (5) tenglamaning umumiy yechimi

(6) $$y(x)=C_1x^{k_1}+C_2x^{k_2}$$

ko`rinishda bo`ladi, bu yerda, $k_1=\left(1+\sqrt{1-4\lambda^2}\right)/2$, $k_2=\left(1-\sqrt{1-4\lambda^2}\right)/2$, C_1 va C_2 lar hozircha ixtiyoriy o`zgarmas sonlar

Endi (6) yechim C_1 va C_2 larning qanday qiymatida (1) tenglamani qanoatlantirishini ko`rsatamiz. Ko`rsatish qiyin emaski

(7) $$C_1=(\lambda/k_1)C_2$$

munosabat bajarilganda (6) tenglik (1) tenglamani qanoatlantiradi. (7) ni (6) qo`yib ba'zi soddalashtirishlarni amalga oshirib, (1) tenglamaning umumiy yechimini

(8) $$y(x)=\left(\frac{\lambda x^{k_1}+k_1x^{k_2}}{k_1}\right)C_2$$

ko`rinishda topamiz.

(8) ni (2) shartga bo`ysuntirib, $y(x)$ ni

(9) $$y(x)=A\frac{\lambda x^{k_1}+k_1x^{k_2}}{\lambda+k_1}$$

ko`rinishda topamiz. $l$ №$0, l$ №$(-1/2)$ ekanligidan $l+k_1$ №$0$ bo`lishi kelib chiqadi.

1- teorema. $|\lambda|<1/2$ bo`lsa $K$ masalaning yechimi (9) ko`rinishda aniqlanadi.

2 - hol. $|\lambda|=1/2$ bo`lsin. U holda (5) tenglamaning umumiy yechimi

(10) $$y(x)=C_3\sqrt{x}+C_4\sqrt{x}\ln x$$

ko`rinishda bo`ladi, bu yerda C_3 va C_4 lar hozircha ixtiyoriy o`zgarmas sonlar.

Endi (6) yechim C_3 va C_4 larning qanday qiymatida (1) tenglamani qanoatlantirishini ko`rsatamiz. Ko`rsatish qiyin emaski $\lambda=1/2$ bo`lganda $C_4 = 0$ bo`lishi kerak. Undan esa (10) ni $y(x)=C_3\sqrt{x}$ bo`lishini topamiz. Uni (2) shartga bo`ysuntirib, $y(x)$ ni $\lambda=1/2$ bo`lgandan $y(x)=A\sqrt{x}$ ko`rinishda topamiz.

$\lambda=(-1/2)$ bo`lganda esa $C_4$ = - $C_3$ bo`lishi kerak. Undan esa (10) ni $y(x)=C_3\sqrt{x}$ bo`lishini topamiz. $y(x)=C_4\sqrt{x}(1-\ln x)$ bo`lishini topamiz. Uni (2) shartga bo`ysuntirib, $y(x)$ ni $\lambda=(-1/2)$ bo`lgandan $y(x)=A\sqrt{x}(1-\ln x)$ ko`rinishda topamiz.

2- teorema. $\lambda=1/2$ va $\lambda=(-1/2)$ bo`lsa $K$ masalaning yechimi mos ravishda $y(x)=A\sqrt{x}$ va $y(x)=A\sqrt{x}(1-\ln x)$ ko`rinishlarda aniqlanadi.

3- hol. $|\lambda|>1/2$ bo`lsin. U holda (5) tenglamaning umumiy yechimi

(11) $$y=\sqrt{x}\left[C_5\cos\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)+C_6\sin\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)\right]$$

ko`rinishda bo`ladi, bu yerda C_5 va C_6 lar hozircha ixtiyoriy o`zgarmas sonlar.

Endi (6) yechim C_5 va C_6 larning qanday qiymatida (1) tenglamani qanoatlantirishini ko`rsatamiz. Ko`rsatish qiyin emaski

(12) $$C_6=\frac{C_5}{2}\sqrt{\frac{2\lambda-1}{2\lambda+1}}$$

munosabat bajarilganda (11) tenglik (1) tenglamani qanoatlantiradi. (12) ni (11) qo`yib ba'zi soddalashtirishlarni amalga oshirib, (1) tenglamaning $|l|>1/2$ bo`lgandagi umumiy yechimini

(13) $$y=\sqrt{x}C_5\left[\cos\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda-1}{2\lambda+1}}\sin\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)\right]$$

ko`rinishda topamiz.

(13) ni (2) shartga bo`ysuntirib, $y(x)$ ni

(14) $$y=\sqrt{x}A\left[\cos\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda-1}{2\lambda+1}}\sin\left(\sqrt{4\lambda^2-1}\ln x\right)\right]$$

ko`rinishda topamiz.

3 - teorema. $|\lambda|>1/2$ bo`lsa $K$ masalaning yechimi (14) ko`rinishda aniqlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. A. Cabada and A.F. Tojo. Equations with involutions. Atlantis Press. 2015.

2. Wiener, J.: Generalized solutions of functional differential equations. World Scientific (1993)

3. Silberstein, L.: Solution of the equation $f(x) = f(1/x)$. Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag. **30**(200), 185–186 (1940)