TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI

Bobojanov To'ychi Ergashevich
Narziyev Olimjon Sagdullayevich
Ermatova Maxbuba Mamatyuldashevna
TIQXMMI, Milliy tadqiqot universiteti.
"International Hause Tashkent" akademik litseyi matematika fani o'qituvchilari

Annotatsiya: *Ushbu maqolada trigonometrik funksiyalarning kelib chiqishi tarixi haqida, shuningdek trigonometrik funksiyalarning davri, aniqlanish sohasi, juft – toqligi, o'sish va kamayish oraliqlari, qiymatlar toʻplami kabi muhim xossalari keltirib o'tilgan, grafiklari orqali batafsil tushuntirilgan. Trigonomeriya bo'limini o'qitishdagi muammolar va trigonometrik funksiyalar mavzusini o'qitishda o'qituvchilar uchun metodik tavsiyalar berilgan.*

Kalit so'zlar: *trigonametriya, funksiya, uchburchak, xossa, grafik, burchak, gradus, radian, sinx, cosx, tgx, ctgx, sonlar, to'plami, juft-toqligi, aniqlanish sohasi, o'sish va kamayishi, tenglama.*

Аннотация: *В данной статье упоминаются и поясняются история происхождения тригонометрических функций, а также важные свойства тригонометрических функций, такие как период, область определения, четность-нечетность, интервалы приращения и убывания, набор значений. подробно через графики. Приведены проблемы преподавания кафедры тригонометрии и методические рекомендации преподавателям при преподавании предмета тригонометрические функции.*

Ключевые слова: *тригонометрия, функция, треугольник, свойство, график, угол, градус, радиан, sinx, cosx, tgx, ctgx, числа, множество, чет-нечет, область определения, увеличение и убывание, уравнение.*

Abstract: *In this article, the history of the origin of trigonometric functions, as well as important properties of trigonometric functions such as period, domain of determination, even-oddness, increment and decrement intervals, set of values are mentioned and explained in detail through graphs. Problems in teaching the trigonometry department and methodical recommendations for teachers in teaching the subject of trigonometric functions are given.*

Key words: *trigonometry, function, triangle, property, graph, angle, degree, radian, sinx, cosx, tgx, ctgx, numbers, set, even-odd, domain, increase and decrease, equation.*

Trigonometriya (yunonchadan "trigon" - uchburchak, "metrezis" - o'lchash so'zlaridan olingan bo'lib, o'zbek tiliga "uchburchaklarni o'chash" deya tarjima qilinadi) - matematikaning asosiy bo'limlaridan biri hisoblanib, uchburchak tomonlari va burchaklari orasidagi bog'lanishlar, trigonometrik funksiyalarning xossalari va ular o'rtasidagi bog'lanishlarni o'rganadi.

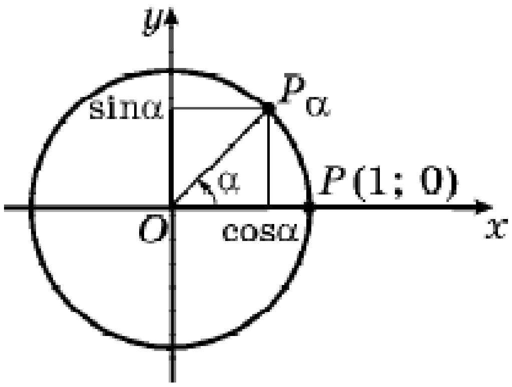
Trigonometriya kursida trigonometrik funksiyalarni o'rganish alohida ahamiyatga ega. Trigonometrik funksiyalar metodologik nuqtai nazardan o'qituvchi uchun ham, tushunish va o’zlashtirish nuqtai nazaridan o’quvchi uchun ham eng qiyin mavzulardan biri hisoblanadi.

Trigonometriyada burchak gradus, radian qiymatda yoki son qiymatida topiladi. Bu tushunchalar bir-biriga o’zaro bog’liq bo’lib, biri orqali ikkinchisi yuzaga keladi. Aylananing umumiy o’lchovi 360 gradus ekanligini birinchi bo’lib, Shumer astronomlari tomonidan isbotlangan, shular qatorida Bobilliklar esa o’xshash uchburchaklarning tomonlari nisbatini o’rganadilar. Shunga o’xshash o’rganishlar yuzasidan uchburchakni aniqlash trigonometriyaga bog’liqligi kelib chiqadi. Trigonometriyaning kelib chiqishi astronomiya fani bilan uzviy bog’liq, chunki aynan shu fan muommolarni hal qilish uchun qadimgi olimlar uchburchakdagi turli miqdorlarning nisbatini o’rganishni boshlagan.

Bizga ma’lumki, trigonometrik doiraning umumiy o’lchov birligi 360 gradusga teng. Bu gradus o’lchov birligini 2π ko’rinishida ham yozish mumkin. Bu o’lchash jarayonlarini Shumer astranomlari tomonidan fanga kiritgan. Shu triganometrik doiraning qiymati bo’lib, ular 4 ta choraklarga bo’linadi, har bir chorak esa, 90 gradusdan qilib bo’linadi. Shunday qilib, biror nuqtadan boshlanuvchi, ikki nurning orasi burchak deb ataladi. Shu burchaklarni o’lchashda cosα, sinα, tgα, ctgα, kabi tushunchalar kiritiladi.

Ixtiyoriy burchakning sinusi va kosinusi quyidagicha ta’riflanadi:

1- ta’rif: α ***burchakning sinusi deb (1; 0) nuqtani koordinatalar boshi atrofida*** α ***burchakka burish natijasida hosil bo‘lgan nuqtaning ordinatasiga aytiladi*** **(sin**α **kabi belgilanadi, 1-rasm).**



1-rasm.

2- ta’rif: α -burchakning kosinusi deb (1; 0) nuqtani koordinatalar boshi atrofida α burchakka burish natijasida hosil bo‘lgan nuqtaning abssissasiga aytiladi (cosα kabi belgilanadi).

3- ta’rif. α burchakning tangensi deb α burchak sinusining uning kosinusiga nisbatiga aytiladi (tg α kabi belgilanadi).

Shunday qilib, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Ba’zan α *burchakning kotangensidan* foydalaniladi (ctgα kabi belgilanadi).

U $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ formula bilan aniqlanadi.

Agar har bir haqiqiy x songa sin$x$ son mos keltirilsa, u holda haqiqiy sonlar to‘plamida y = sin$x$ funksiya berilgan bo‘ladi. y = cos$x$, y = tg$x$ va y = ctg$x$ funksiyalar shunga o‘xshash aniqlanadi.

y = sinx funksiyaning xossalari va grafigi.

1. y = sinx funksiyaning asosiy xossalari:

a) funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan, yani x є R;

b) funksiya cheklangan bo‘lib, uning qiymatlar to‘plami [- 1; 1]

kesmadan iborat; x =$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, к є Z nuqtalarda funksiya 1 ga teng bo’lgan eng katta qiymatlarni qabul qiladi, x = -$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, k є Z nuqtalarda esa -1 ga teng eng kichik qiymatlarni qabul qiladi;

d) funksiya toq: barcha x є R lar uchun sin (-x) = - sin x ;

e) funksiya eng kichik musbat davri 2π ga teng bo‘lgan davriy funksiyadir: barcha x є R lar uchun sin(x + 2π) = sinx ;

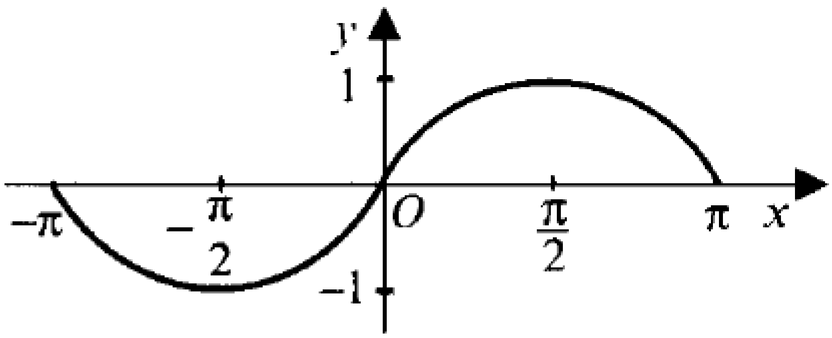
f) barcha x є (2kπ; π + 2kπ), k e Z larda sinx > 0;

g) barcha x є (π + 2кπ; 2π + 2кπ), k є Z larda sinx < 0;

h) barcha x = πk, x є R nuqtalarda sinx = 0. Shuning uchun uning x argumentning 0, ±π; ±2π; ... qiymatlari y = sinx funksiyaning nollari deb ataladi;

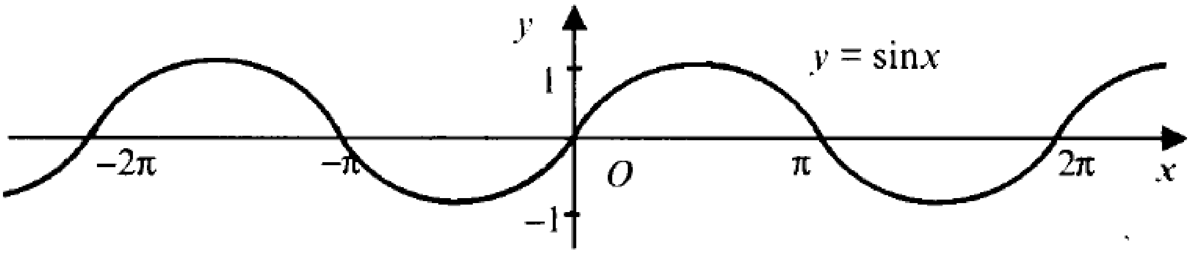
i) funksiya [-$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ; $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ], **k** є **Z** oraliqlarda -1 dan 1 gacha o‘sadi, [-$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ; $\frac{3\pi}{2}$ + 2kπ], **к** є **Z** oraliqlarda esa 1 dan -1 gacha kamayadi.

2. Sinusning xossalaridan foydalanib, avval uning grafigini uzunligi funksiyaning davriga teng bo‘lgan [−π; π] oraliqda yasaymiz (2-rasm).



2-rasm

So'ngra **y** = sinx funksiyani davriyligidan foydalanib bu grafikni chapga va o'ngga davriy ravishda davom ettirib, butun sonlar o'qida funksiya grafigini yasaymiz (3-rasm). Hosil bo'lgan egri chiziq **sinusoida** deb ataladi.



3-rasm

y = cosx funksiyaning xossalari va grafigi.

1. y = cosx funksiyaning asosiy xossalari:

a) funksiyaning barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan,

ya'ni x є R;

b) funksiya cheklangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami [-1; 1] dan iborat. x = 2kπ, x є R nuqtalarda funksiya 1 ga teng eng katta qiymatlarni qabul qiladi, x = π + 2kn, k є Z nuqtalarda esa -1 ga teng eng kichik qiymatlarni qabul qiladi;

d) funksiya juft: barcha x є R lar uchun cos(-x) = cosx;

e) funksiya eng kichik musbat davri 2π ga teng bo'lgan davriy

funksiyadir: barcha x є R lar uchun cos(x + 2π) = cosx;

f) barcha [-$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ; $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ k є Z larda cosx > 0;

g) barcha [$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ; $\frac{3\pi}{2}$ + 2kπ] k є Z larda cosx < 0;

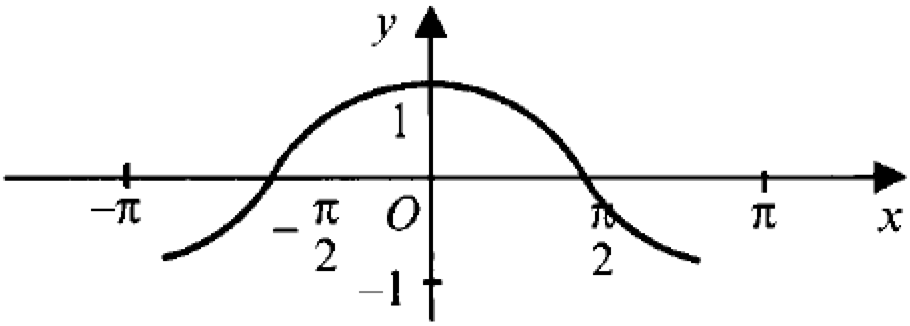
h) barcha x = [$\frac{\pi}{2}$ + 2kπ] к є Z nuqtalarda cosx = 0.

Shuning uchun x argumentning $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pm 5\pi}{2}$;... qiymatlari

y = cosx funksiyaning nollari deb ataladi;

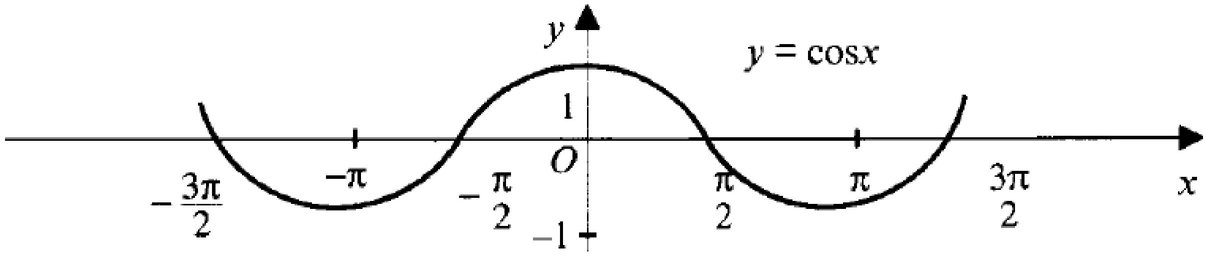
i) funksiya [-π + 2kπ; 2kπ], k є Z oraliqlarda -1 dan 1 gacha o'sadi, [2kπ; π + 2kπ], k є Z oraliqlarda esa 1 dan -1 gacha kamayadi;

2. Kosinusning xossalaridan foydalanib, avval uning grafigining uzunligi funksiyaning davriga teng bo'lgan [-π ; π] oraliqda yasaymiz (4-rasm).



4-rasm.

So‘ngra y = cosx funksiyaning davriyligidan foydalanib bu grafikni chapga va o'ngga davriy ravishda davom ettirib, butun sonlar o‘qida funksiya grafigini yasaymiz (5-rasm).



5-rasm

cos x = sin (x + $\frac{\pi}{2}$) tenglik o‘rinli bo‘lganligi sababli bu grafikni y = sinx funksiya grafigini abssissalar o‘qi bo‘ylab chapga $\frac{\pi}{2}$ qadar siljitib ham hosil qilish mumkin. 5-rasmda tasvirlangan egri chiziq kosinusoida deb ataladi.

y = tgx funksiyaning xossalari va grafigi.

1. y = tgx funksiyaning asosiy xossalari:

a) funksiya x ning x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k є Z dan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan;

b) y = tgx funksiya cheklanmagan. Uning qiymatlar to‘plami barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat.

d) funksiya toq: funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun tg (-x) = tgx ;

e) funksiya eng kichik musbat davri π ga teng boigan davriy funksiyadir: funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun tg(x + π) = tgx ;

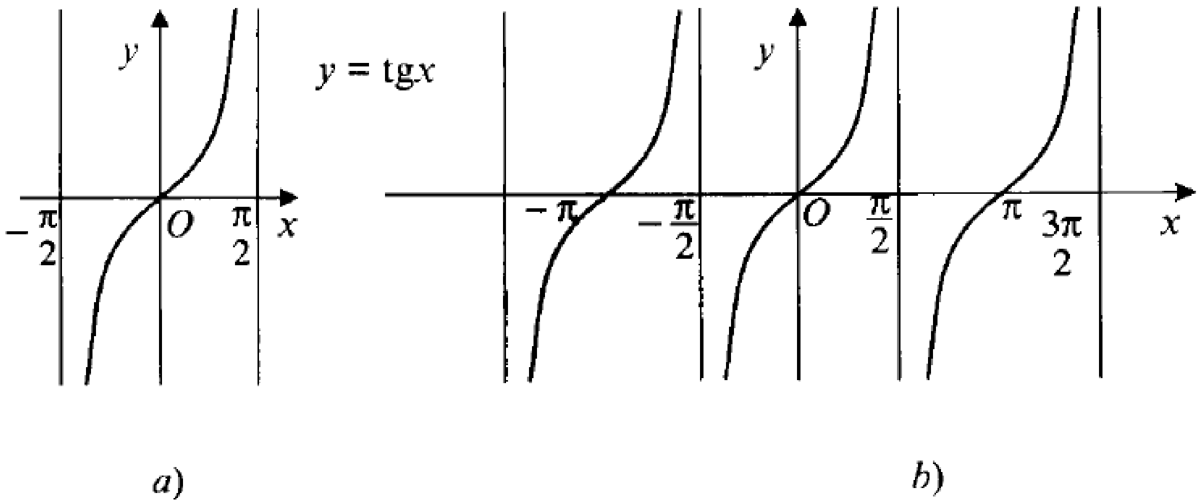
f) barcha x є (kπ; $\frac{\pi}{2}$ + kπ) k є Z larda tgx > 0;

g) barcha x є (- $\frac{\pi}{2}$ + kπ; kπ); k є Z larda tgx < 0;

h) barcha x = kπ, k є Z nuqtalarda tgx = 0. Shu sababli x argumentning 0, ±π; ±2π; ±3π; ... qiymatlari y = tgx funksiyaning nollari deyiladi;

i)funksiya (- $\frac{\pi}{2}$ + kπ; $\frac{\pi}{2}$ + kπ) k є Z oraliqlarda, ya’ni o‘zining aniqlanish sohasida o‘sadi.

2. Tangensning xossalaridan foydalanib, dastlab uning grafigini uzunligi funksiyaning davriga teng bo‘lgan(- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$) oraliqda yasaymiz (6-a rasm). So‘ngra y = tgx funksiyani davriyligidan foydalanib bu grafikni chapga va o‘ngga davriy ravishda davom ettirib, butun sonlar o‘qida funksiya grafigini yasaymiz (6- b rasm). Bu egri chiziq tangensoida deb ataladi.



6-rasm

y = ctgx funksiyaning xossalari va grafigi.

1. y = ctgx funksiyaning asosiy xossalari:

a) funksiya x ning $x = k\pi$, $k \in Z$ dan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan;

b) y = ctgx funksiya cheklanmagan. Uning qiymatlar to‘plami barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat;

d) funksiya toq: funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun ctg(-x) = ctgx;

e) funksiya eng kichik musbat davri π ga teng bo‘lgan davriy funksiyadir: funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun ctg(x + π) = ctgx;

f) barcha $x \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $k \in Z$ larda ctgx > 0;

g) barcha $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$, $k \in Z$ larda ctgx < 0;

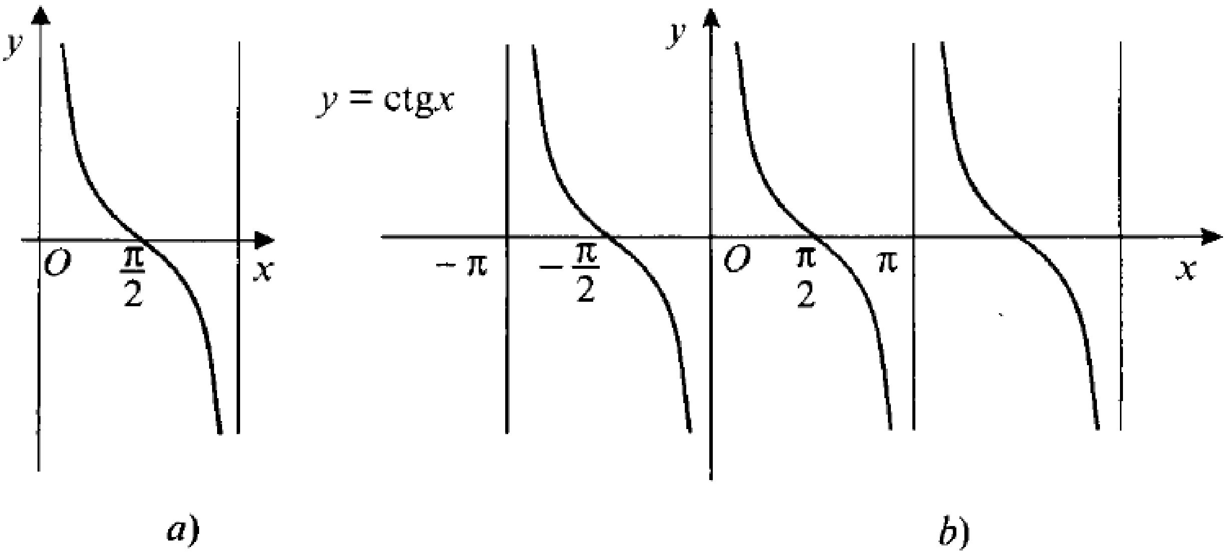
h) barcha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ nuqtalarda ctgx = 0. Shu sababli x argumentning $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$; … qiymatlari y = ctgx funksiyaning nollari deb ataladi;

i) funksiya $(k\pi; \pi + k\pi)$ $k \in Z$ oraliqlarda, ya’ni o‘zining aniqlanish sohasida kamayadi.

Kotangensning xossalaridan foydalanib, avval uning grafigini uzunligi funksiyaning davriga teng bo‘lgan (0; π) oraliqda yasaymiz (7-a rasm). Keyin y = ctgx funksiyaning davriyligidan foydalanib, bu grafikni chapga va o‘ngga davriy ravishda davom ettirib, butun sonlar o‘qida funksiya grafigini yasaymiz

(7- b rasm).

ctg x = - tg $(x + \frac{\pi}{2})$ tenglik o‘rinli bo'lganligi sababli bu grafikni y = tgx tangensoidani abssissalar o‘qi bo‘yicha chapga $\frac{\pi}{2}$ qadar siljitib, hosil bo‘lgan egri chiziqni abssissalar o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirib yasash mumkin. Bu egri chiziq kotangensoida deyiladi.



7-rasm

Ushbu kursni o’tish davomida o’qituvchining o’zi trigonometrik funksiyalar, tenglamalar va tengsizliklarni yechish bo’yicha ko’nikma va malakalarinini rivojlantirish usullarini yetarli darajada bilishi shart. Shubhasiz, faqat zamonaviy darsliklar mualliflari tomonidan taklif qilingan vositalar va usullardan foydalangan holda belgilangan maqsadga erishish deyarli mumkin emas. Bu o’quvchilarning individual xususiyatlari bilan bog’liq. Ularning trigonometriya bo’yicha asosiy bilimlari darajasiga qarab, turli darajadagi trigonametrik funksiyalar, tenglamalar va tengsizliklarni o’rganish uchun imkoniyatlar qatori quriladi.

Trigonometrik funksiyalar va tenglamalarni yechish trigonometriya materialiga oid o’quvchilar bilimini tizimlashtirish uchun shart sharoit yaratibgina qolmay, balki o’rganilayotgan algebraik material bilan samarali bog’lanishni ham ta’minlaydi. Bu trigonometrik funksiyalar va tenglamalarni o’rganish bilan bog’liq bo’lgan materialning xususiyatlaridan biridir. O’qituvchi bu xususiyatlarni o’quvchilarini trigonometrik funksiyalar va tenglamalarni yechishga o’rgatish metodikasini ishlab chiqishda hisobga olishi kerak.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. S.Alixonov. Matematika o ‘qitish metodikasi. T.: Cho‘lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011

2. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz. -T.: O‘qituvchi. 1986

3. Galitskiy M.A. va boshqalar. Algebra va matematik analiz kursini chuqur o‘rganish. T., O‘qituvchi, 1995

4. Avezov A.X. Matematika o‘qitishning tatbiqiy metodlari. Pedagogik mahorat, 2021.

5. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov. Algebra. Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9- sinfi uchun darslik.

6. M.Mirzaahmedov, Sh.Ismailov, A.Qamanov, B.Haydarov. O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalari o‘quvchilari uchun Matematika fanidan darslik Toshkent- MCHJ “EXTREMUM PRESS”, 2017 y.

7. M.Mirzaahmedov, Sh.Ismailov, A.Qamanov, B.Haydarov. O‘rta ta’lim muassasalarining 11-sinfi va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalari o‘quvchilari uchun Matematika fanidan darslik Toshkent- “ZAMIN NASHR” MCHJ, 2018 y.