УДК 519.63

ARALAS TUWINDILI TURAQLI KOEFFICIENTLI EKI ÓLSHEMLI SPEKTRALLIQ MÁSELENIŃ DISKRET MENSHIKLI MÁNISIN EKI TÁREPLEME BAHALAW

J.P.Allanazarov
NMPI dotcenti

Аннотация: *Jumısta aralas tuwındılı ekinshi tártipli turaqlı koefficientli elliptikalıq teńlemesi ushın spektrallıq másele tuwrı múyeshli oblastta qaralġan. Bul másele ushın óz-ózine tuyinles hám oń anıqlanġan operatorlı shekli ayırmalı sxema dúzilgen hám diskret máseleniń menshikli mánisleri úshın eki tárepleme bahalar dálillengen.*

Giltlik sózler: *menshikli mánis, spektrallıq másele, shekli ayırmalı sxema, tuwtımúyeshlik, óz-ózine túyinles operator.*

Ishda aralash hosilali doimiy koeffitsiyentli ikkinchi darajali elliptik tenglama uchun spektral muammo to'g'ri burchakli hududda qaralgan. Vazifa uchun o'z-o'zidan bog'langan va ijobiy aniqlangan operatorli chekli ayirmali sxemasi tuzilgan va diskret vazifaning o'ziga xos qiymati uchun ikki tomonlama baholar isbotlangan.

Kalit so'zlar: *xususiy qiymatlar, spektral muammo, chekli ayirmali sxema, to'rtburchak, o'z-o'zidan bog'langan operator*

В работе рассмотрено спектральная задача для эллиптического уравнения второго порядка со смешанной производной и с постоянными коэффициентами в прямоугольной области. Для задачи построена разностная схема с самосопряженным и положительно определенным оператором и для собственной значении дискретной задачи доказаны двусторонние оценки.

Ключевые слова: *собственные значения, спектральная задача, разностная схема, прямоугольник, самосопряженный оператор*

The paper considers a spectral problem for a second-order elliptic equation with a mixed derivative and constant coefficients in a rectangular region. A difference scheme with a self-adjoint and positive definite operator is constructed for the problem, and two-sided estimates are proved for the eigenvalue of a discrete problem.

Keywords: *eigenvalues, spectral problem, difference scheme, rectangle, self-adjoint operator.*

Jumısta aralas tuwındılı ekinshi tártipli turaqlı koefficientli elliptikalıq teńlemesi ushın spektrallıq másele tuwrı múyeshli oblastta qaralġan. Bul másele ushın óz-ózine tuyinles hám oń anıqlanġan operatorlı shekli ayırmalı sxema dúzilgen hám diskret máseleniń menshikli mánisleri úshın eki tárepleme bahalar dálillengen.

Ilimniń hám texnikanıń kóplegen mámeleleri, mısalı, terbelis hám ornıqlılıqqa baylanıslı máseleleri modellestiriw basqıshında elliptikalıq tiptegi operator ushın spektrallıq máselelerdi sheshiw zárúrligine alıp keledi. Ekinshi tártipli elliptikalıq operatorlar ushın menshikli mánis máselesine baylanıslı torlar metodınıń dálligi [1-5] jumıslarda izertlendi. [1] jumısında kesindili-analitikalıq shegaralı oblastında koefficienti analatikalıq bolıwı esapqa alınıp óz-ózine túyinles ekinshi tártipli elliptikalıq operatordıń m.m. niń L_2 keńisliginde $O(h)$ jıynaqlılıq bahası alınǵan. [2,5] jumısında Laplas operatorı bes tochkalı shekli ayırmalı operator menen approksimaciyalanadı. Sonda shegarası shekli sandagı kesindili-analitikalıq tuyıq iymekliktiń ishki múyeshi π den úlken bolmaǵan oblastlar ushın m.m. niń L_2 keńisliginde $O(h^2)$ jıynaqlılıq bahası alınǵan. Al egerde oblast dúńki bolsa, onda m.m.ushın mına $0\leq\lambda_n\leq O(h^2)$ eki tárepli bahası orınlanǵan. Teń ólshemli metrikada, egerde oblasttıń ishki múyeshleri π/2 den úlken bolmaǵanda m.f. nıń qateligi ushın $O(h^2 lnh)$ bahası alınǵan.

Qaralıp atırǵan jumısta ekinshi tártipli elliptikalıq teńlemesi ushın menshikli mánis máselesine joqarı tártipli diskretlik masele qaralıp, onıń menshikli mánisi (m.m.) ushın eki tárepli bahalar ornatıldı.

1.1. **Máseleniń qoyılıwı.** Meyli m.m. hám m.f. tabıwǵa arnalǵan tómendegi teńlemeni qanaatlandıratuǵın máseleni qarastırayıq:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\right]d\Omega=$$

$$=\lambda\iint_{\Omega} uvd\Omega,\ \text{қалеген}\ v\epsilon\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ |\alpha|<1, x\epsilon\Omega, \qquad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma}=0, \qquad (1.2)$$

bunda Ω-shegarası Γ bolǵan $\{0<x_i<l_i,\ i=1,2\}$ tuwrımúyeshlik, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –Sobolev keńisligi.

Bul másele tómendegi variaciyalıq máselesine ekvivalent boladı: sonday u$\epsilon\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ funkciyasın tabıw kerek, mına tómendegi kvadratlıq formulası

$$D[u]=\iint_{\Omega}\left[(\frac{\partial u}{\partial x_1})^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right]d\Omega$$

mına tómendegi shartinde

$$H[u]=\iint_{\Omega} u^2 d\Omega=1, \qquad u|_{\Gamma}=0$$

eń kishi mánisine iye bolsın.

Bul minimum eń kishi m.m. ti anıqlaydı

$\lambda_1=\min D[u]=D[u_1]$

hám birinshi m.f. da erisiledi.

Mánisi boyınsha ekinshi m.m. hám oǵan sáykes keliwshi m.f. dál usınday (λ_1, u_1) dey mına qosımsha ortogonallıq shartin

$$\iint_{\Omega} u_1\, u d\Omega = 0$$

qanaatlandırǵanda anıqlanadı.

1.2. Diskretlik másele.

Meyli tuwrımúyeshliktiń tárepleri l_i óz-ara sáykeslestirilgen bolsın. Tuyıq Ω oblastında mına túyinlerden ibarat $x=(x_1,x_2)$, $x_s= i_s h$, $i_s= 0,1,2,\dots, N_s$, $h=1/N_s$, $s=1,2$ tuwrı múyeshli torlardı kirgizemiz.

Ishki túyinlerdiń kópligin $\omega=\{x, i_s=1,2,\dots,N_s-1\}$. Shegaralıq túyinlerdi

$\gamma\ =\gamma_+^{(1)} U\gamma_-^{(1)} U\gamma_+^{(2)} U\gamma_-^{(2)}$, bunda $\gamma_+^{(s)}=\{x,\ i_s=\ N_s,\ i_\gamma=1,2,\dots, N_\gamma-1\}$, $\gamma_-^{(s)}=\{x,\ i_s=0,\ i_\gamma=1,2,\dots, N_\gamma\ \}$ belgileymiz.

Berilgen (1.1),(1.2) máseleniń diskretlik analogi sıpatında mına tómendegi máseleni qarastıramız:

$\Delta^h y + \alpha B_1^h y + h^2 \beta B_2^h y + \lambda^h y = 0, \quad x\epsilon\omega$ (1.3)

$y=0, \quad x\epsilon\,\gamma$ (1.4.)

bunda

$\Delta^h y = y_{\overline{x_1}x_1} + y_{\overline{x_2}x_2}$, $B_1^h y = y_{\overline{x_1}x_2} + y_{\overline{x_2}x_1}$, $B_2^h y = y_{\overline{x_1}x_1\overline{x_2}x_2}$,

$\beta=(1+3\alpha+2\alpha^2)/6$.

ω torınıń túyinlerinde berilgen hám γ shegalıq túyinlerinde nolge aylanatuǵın torlıq funkciyalardıń Y keńisligın kirgizemiz. (1.1) máselesine sáykes keliwshi variacialıq máseleniń kvadratlıq funkcionalı tómendegı túrge iye boladı:

$D^h y = (y_{\overline{x_1}}^2, 1)_3 + (y_{\overline{x_2}}^2, 1)_4 + 2\alpha(y_{\overline{x_1}}, y_{\overline{x_2}})_1 - h^2\beta(y_{\overline{x_1}x_2}^2, 1)_1$,

bunda $(\ ,\ )_1 = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}$, $(\ ,\ )_3 = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}$, $(\ ,\ )_4 = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2}$.

Variacialıq máseleniń kavadratlıq funkcionalı m.m. hám m.f. nı bılayınsha anıqlaydı: torlıq funkciyanıń Y klassinda D^hy funkcionalınıń

$H^h y = = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} y_{i,j}^2 = 1$ (1.5)

shartin qanaatlandırǵandaǵı minimumı eń kishi m.m. ti beredi, yaǵnıy

$\lambda_1^h = \min_{x\epsilon\omega} D^h y = D^h y_1$

hám (1.3),(1.4) máselesiniń y_1 m.f. sında ámelge asadı.

1.2. Menshikli mánis (m.m.) ushın eki tárepleme baha

(1.3),(1.4) máselesiniń m.m. ushın eki tárepleme bahasın alıw ushın mına tómendegi tastıyqlawdı dálilleymiz.

Tastıyqlaw 1. $y\in Y$ torlıq funkciyası ushın mına teńsizliǵi orınlı

$4h^2 D_o^h[y] \le (h^2, y_{\overline{x_1}\overline{x_2}}^2)_1 \le 2D_o^h[y]$ (1.6)

bunda

$D_o^h[y] = (1, y_{\overline{x_1}}^2 + y_{\overline{x_2}}^2)_1$.

Dálilleniwi. M.m.ushın járdemshi máseleni qarastıramız:

$y_{\overline{x_1}x_1\overline{x_2}x_2} + \nu\Delta^h y = 0, \quad x\epsilon\omega$ (1.7)

$y=0, \quad x\epsilon\,\gamma$,

bunda $\nu = const.$

(1.7) máselesiniń m.m.leri mına túrge iye boladı

$\nu_{k_1k_2}=\frac{\nu_{k_1}\nu_{k_2}}{\nu_{k_1}+\nu_{k_2}}$,

bunda

$\nu_{k_s}=(\pi k_s \frac{\sin\theta_s}{\theta_s})^2$, $\theta_s = \frac{\pi k_s h}{2}$, $k_s=1,2,\dots,N-1$, $s=1,2$ –bir ólshemli tómendegi máseleniń m.m.

$y_{\overline{x_s}x_s} + \nu y = 0$, $i_s=1,2,\dots,N_s-1$,

$y_0 = y_N = 0$, $s=1,2$.

ν m.m. mına tómendegi funkcionaldı minimizaciyalaw arqalı tabılatuǵınlıqtan

$$\frac{(y^2_{\overline{x_1x_2}}, 1)_1}{(y^2_{\overline{x_1}} + y^2_{\overline{x_2}},\ 1)_1}$$

onda, mınalardı esapqa alıp

$\min\nu_{k_1k_2} = \frac{\pi^2}{2}\frac{(\sin\theta_s)^2}{\theta_s}$, $\max\nu_{k_1k_2}=\frac{2}{h^2}cos^2\theta$

$\theta < \pi/4$ bolǵanda $\cos\theta<1$, $\frac{sin\theta}{\theta} \geq \frac{\theta}{\pi^2}$ boladı hám (1.6) teńsizliginiń orınlı ekenligine isenim payda etemiz.

Tastiyqlaw 2. y$\in Y$ torlıq funkciyası ushın tómendegi qos teńsizligi orınlı

$c_1(\alpha)D_o^h[y] \leq D^h[y] \leq c_2(\alpha)D_o^h[y]$ (1.8)

bunda

$$c_2(\alpha) = \begin{cases} 1 + |\alpha| - 4h^2\beta, \beta > 0, (|\alpha| < 0.5), \\ 1 - |\alpha| - 2\beta, \beta < 0, (|\alpha| > 0.5), \end{cases}$$

$$c_1(\alpha) = \begin{cases} 1 - |\alpha| - 2\beta, \beta > 0, \\ 1 - |\alpha| - 4h^2\beta, \beta < 0, \end{cases}$$

Dalilleniwi. Berilgen maseleniń elliptivlik shartinen ($|\alpha| < 1$) mına teńsizlikke iye bolamız

$(1-|\alpha|)\, D_o^h[y] \leq (y^2_{\overline{x_1}} + y^2_{\overline{x_2}} + 2\alpha y_{\overline{x_1x_2}}, 12)_1 \leq (1 + |\alpha|)\, D_o^h[y]$. (1.9)

(1.6) hám (1.9) teńsizliklerin biriktirip (1.8) teńsizligine iye bolamız.

ÁDEBIYATLAR:

1. Prikazchikov V.G. Raznostnaya zadacha na sobstvennie znacheniya dlya ellipticheskogo operatora.//Jurn. Bichislitelnoy matematiki i mat. fiziki.-1965. T.5. -4. S.648-657.

2. Prikazchikov V.G., Allanazarov J.P. Utochnenie resheniy v diskretnoy spektralnoy zadache.// Vichislitel. i prikl. Matematika.-1989.vip.69.-s. 56-63.

3. Prikazchikov V.G., Allanazarov J.P. Sxema chetvertogo poriyadka tochnosti v spektralnoy zadache dliya uravneniya so smeshannoy proyzvodnoy.// differenciyalnie uravneniya.-1989.-T.25.-7.s.1250-1255.

4. Prikazchikov V.G., Allanazarov J.P. Tochnost diskretnoy spektralnoy zadachi so smeshannoy proyzvodnoy.//Izves. Visshey ucheb. zavedenii.-1991.-9.-s.83-86.

5. Prikazchikov V.G. Diskretniy spektr operatora Laplasa s razlichnimi usloviyami na graniceproizvolnogo treugolnika.//Kibernetika i sistemniy analiz.-T.55.-№4.