ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА СОДЕРЖАЩЕГО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР.

К.С. Газиев
к.ф.-м.н. ksgaziev1965@gmail.com
Н.У.Мирзарахимова
магистрант. nargizaub12@gmail.com

Аннотация. *В статье рассмотрена краевая задача для уравнения четвёртого порядка составного типа, доказана единственность решения краевой задачи методом интегралов энергии, а при доказательстве существовании решения использована теория интегральных уравнений.*

Annotation. *The article shows a boundary value problem for a fourth-order equation, shows the uniqueness of the solution of a boundary value problem by the method of energy integrals, and the theory of integral equations is used to prove the existence of a solution.*

Ключевые слова и выражения:*уравнения высокого порядка, функция Грина, задача Дирихле, уравнение Лапласа, уравнение Фредгольма.*

Key words and expressions: *high-order equations, Green function, Dirichlet problem, Laplace equation, boundary value problem, Fredholm equation, energy integral.*

Возникновение теории уравнений составного типа связано с исследованиями Ж.Адамара [1], О.Сестранда [2], параллельно были достигнуты определенные успехи при построении теории уравнений смешанного типа второго порядка. Поэтому дальнейшие интенсивные исследования проводились как по уравнениям составного типа, так и по уравнениям смешанно-составного типа.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u + Cu = f \qquad (1)$$

в области $D = \{(x, y); 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

Задача P. Определить регулярное в области D решение уравнение (1), непрерывное вместе с производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{D}$, и удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi_0(y),\ u(1, y) = \varphi_1(y),\quad 0 \le y \le 1,\\ &u(x,0) = \psi_0(x),\ u(x,1) = \psi_1(x),\quad 0 \le x \le 1, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$u_x(1, y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le 1, \qquad (3)$$

$$u_y(x,1) = \psi_2(x),\ 0 \le x \le 1, \qquad (4)$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le 1 \qquad (5)$$

$$u_{yy}(x,0)=\psi_3(x),\ \ 0\le x\le 1 \qquad (6)$$

Здесь $\varphi_i(y),\psi_i(x),(i=0,1,2,3)$ $c(x,y)$, $f(x,y)$ - заданные функции, причем

$\psi_0(1)=\varphi_1(0)$, $\varphi_1(1)=\psi_1(1)$, $\psi_1(0)=\varphi_0(1)$, $\varphi_0(0)=\psi_0(0)$.

$$\varphi_2(0)=\varphi_1'(0)=\psi_0'(1), \qquad \varphi_0''(0)=\psi_0''(0)=\varphi_3(0)=\psi_3(0)$$

$$\varphi_2(1)=\varphi_1'(1)=\psi_1'(1), \qquad \varphi_0''(1)=\psi_1''(0)=\psi_2'(0)=\varphi_3(1)$$

$$\psi_2(0)=\varphi_0'(1)=\psi_1'(0), \qquad \psi_0''(1)=\varphi_1''(0)=\varphi_2'(0)=\psi_3(1),$$

$$\psi_2(1)=\varphi_1'(1)=\psi_1'(1), \qquad \psi_1'(1)=\varphi_1''(1)=\varphi_2'(1)=\psi_2'(1).$$

Доказательство единственности решения.

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 1. Если $c(x,y)\ge 0$, то задача P в области D не может иметь более одного регулярного решения.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу P, т.е. считаем

$$\varphi_i(y)\equiv\psi_i(x)\equiv f(x,y)\equiv 0,\ \ i=0,1,2,3. \qquad (7)$$

Пусть $D_\varepsilon=\{(x,y):\varepsilon<x<1-\varepsilon,\ \varepsilon<y<1-\varepsilon\}$, ($D_\varepsilon\to D$ при $\varepsilon\to 0$) Γ_ε - граница области D_ε, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, а $u(x,y)$ - решение задачи P при условии (7).

Умножая уравнение (1) на функцию $u(x,y)$ и интегрируя по области D_ε имеем

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} u\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx}+u_{yy})+c(x,y)u\right)dxdy=0 \qquad (8)$$

Используя тождество

$$u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u=u\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx}+u_{yy})=(u\Delta u_x)_x-(u_xu_{xx})_x+$$

$$+u_{xx}^2+(u_xy_{xy})_y+u_{yy}^2 \qquad (9)$$

интегрируя по частями из (8) получим, что

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}u\Delta u_x dy-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}u_xu_{xx}dy-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}u_xu_{yy}dx+$$

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}(u_{xx}^2+u_{xy}^2+c(x,y)u^2)dxdy=0 \qquad (10)$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая (7), имеем

$$\iint\limits_{D}[u_{xx}^2+u_{xy}^2]dxdy+\iint\limits_{D}c(x,y)u^2dxdy=0$$

В силу условий теоремы (1) из (10) следует, что если

а) $c(x,y)\neq 0$ то $u\equiv 0$ в области D.

б) $c(x,y)=0$ то $u_{yx}=u_{xx}=const$ в области D. Так как $u\epsilon c^2(D)$ то $u_{yx}=u_{xx}=0$

Интегрируя одно из последних уравнений получим

$u_{xx} = 0, \quad u = \varphi(y)x + \varphi_1(y)$

Теперь используя граничные условия (2) принимая во внимание (7) получим что $u=0$ в D. Теорема доказана.

Существование решения задачи *P*.

Теорема 2. Если функции

$$\varphi_i'''(y), \ (0 \le y \le 1), \ \psi_i'''(x), (0, \le x \le 1), i = 0,1,$$

$$\varphi_3'(y), \varphi_2''(y), (0 \le y \le 1), \psi_3'(x), \psi_2''(x), (0 \le x \le 1),$$

удовлятворяют условию Гельдера с показателем $\gamma \ (0 < x < 1)$т.е $\in H^\gamma$ и $c(x,y), \ f(x,y) \in H(D)$, кроме того

$\varphi_i''(j), \psi_i''(j), \varphi_3(j), \psi_3(j), \varphi_2'(j), \psi_2'(j) (i = 0,1; \ j = 0,1)$

равны нулю, то решение задачи P существует.

Доказательство. В силу обозначения $u_{xx} = \upsilon$ уравнение (1) примет вид

$$\Delta\upsilon = f(x,y) - c(x,y)u(x,y) \qquad (12)$$

Учитывая (2)-(6), для функции $\upsilon(x,y)$ получим следующие краевые условия

$\upsilon(0,y) = u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y)$

$\upsilon(x,0) = u_{xx}(x,0) = \psi_0''(x)$

$\upsilon(1,y) = u_{xx}(1,y) = \varphi_4(y)$

$\upsilon(x,1) = u_{xx}(x,1) = \psi_2'(x)$

а функция $u_{xx}(1,y) = \varphi_4(y)$ пока неизвестна.

Регулярное в области D решение уравнение (12), выражается формулой.

$$\upsilon(x,y) = \int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,0)\varphi_0(\xi)d\xi - \int_0^1 G_\eta(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi +$$
$$+\int_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta - \int_0^1 G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta -$$
$$-\iint_D G(x,y,\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta + F(x,y) \qquad (13)$$

Здесь

$$F(x,y) = \iint_D G(x,y,\xi,\eta)c(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$G(x,y,\xi,\eta) = -ln|z-\xi| - ln\frac{|z+\xi|}{|z+\xi||z-\xi|}$$

-Re ln $\prod_\omega \left\{\frac{(z+\xi-\omega)(z-\xi-\omega)}{(z+\xi-\omega)(z-\xi-\omega)}\right\} exp\left(i\,\frac{\xi\eta}{\omega^2}\right)$- функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике, где

$$z = x + iy, \ \ \xi = \xi + i\eta, \ \ \omega = m + n, \ \ m,n = \pm 1, \pm 2$$

Для определения функции $u(x,y)$ в области D необходимо решить следующие две задачи

$$\begin{cases} w_x = \upsilon(x,y) \\ w(1,y) = \varphi_2(y) \end{cases} \qquad (14)$$

и

$$\begin{aligned} & u_x = w \\ & u(0,y) = \varphi_0(y) \end{aligned} \qquad (15)$$

Решение задачи (14) задается формулой

$$w = \int_1^x \upsilon(t,y)\,dt + \varphi_2(y) \qquad (16)$$

Определим теперь решение задачи (15) . Оно имеет вид

$$u = \int_0^x w(t_1,y)\,dt + \varphi_0(y) + \varphi_2(y)x \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} W = & \int_1^x \Bigg[\int_0^1 G_\eta(t,y,\xi,0)\psi_0''(\xi)\,d\xi - \int_0^1 G_\eta(t,y,\xi,1)\psi_2(\xi)\,d\xi + \\ & + \int_0^1 G_\xi(t,y,1,\eta)\varphi_4(\eta)\,d\eta - \int_0^1 G_\xi(t,y,0,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta \Bigg] dt + \\ & + \int_1^x \iint_D c(\xi,\eta)G(t,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + \varphi_2(y) + \\ & + \int_1^x \left[\iint_D G(t,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \right] dt \end{aligned} \qquad (18)$$

В (18) меняем порядок интегрирования вычислим

$$J_1 = \int_0^x dt \int_1^t G(t_1,y,\xi,\eta)\,dt_1$$

$$J_2 = \int_0^x dt \int_1^t G_\eta(t_1,y,1,\eta)\,dt_1 = \int_0^x dt \int_1^t -\frac{y-\eta}{(t-1)^2-(y-\eta)^2} +$$

$$+ \int_0^x dt \int_1^t g_n(t_1,y,1,\eta)\,dt_1$$

Из (18) получим интегральные уравнения относительно $u\,(x,y)$

$$u(x,y) + \frac{1}{4}\iint_D R(t,y,\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = F(x,y) \qquad (19)$$

где

$$F(x,y)=\bar{F}(x,y)+\int_0^1\gamma_3(x,y,1,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta$$

$$\bar{F}(x,y)=\frac{1}{4}\iint_D K(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^1\gamma_2(x,y,\xi,0)\psi_0''(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^1\gamma_4(x,y,\xi,1)\psi_2'(\xi)d\xi+\int_0^1\gamma_1(x,y,0,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta$$

$$\gamma_i(x,y,\xi,\eta)=(x-\xi)\ln[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]+k_i(x,y,\xi,\eta),\ \ i=1;3$$

$$\gamma_j(x,y,\xi,\eta)=2\int_0^x\left[\left[arctg\frac{t-\xi}{y-\eta}-arctg\frac{-\xi}{y-\eta}\right]+\frac{1}{2}k_j(t,y,\xi,\eta\right]dt,\quad j=2;4$$

$$R(x,y,\xi,\eta)=((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)\ln\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]+k_5(x,y,\xi,\eta)$$

Разрешая уравнение (19), имеем

$$u(x,y)=\bar{F}_0(x,y)+\int_0^1\bar{\gamma}_3(x,y,1,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta \qquad (20)$$

здесь

$$\bar{\gamma}_i(x,y,\xi,\eta)=\gamma_i(x,y,\xi,\eta)+P_i(x,y,\xi,\eta),$$

$$P_i=(x,y,\xi,\eta)=\pm\frac{1}{4}\iint_D\Gamma(x,y,\xi,\eta)\gamma_i(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)d\xi_1 d\eta_1,\quad i=1;3$$

$\Gamma(x,y,\xi,\eta)$ - резольвента ядра $R(x,y,\xi,\eta)$,

$\kappa_l(x,y,\xi,\eta)$ - известные функции.

Дифференцируя теперь выражение (20) по x и полагая x=1, затем дифференцируя полученный результат по y, мы приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\varphi_4(y)$.

$$\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)}{\eta-y}d\eta+\int_0^1 R_4(y,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta=F_2(y) \qquad (21)$$

Здесь

$$R_4(y,\eta)=-(P_{3xy}(1,y,1,\eta)-P_{3y}(1,y,1,\eta))$$

(21) напишем в следующей форме

$$\int_0^1\frac{\varphi_4(\eta)}{\eta-y}d\eta=F_3(y), \qquad (22)$$

Здесь

$$F_3(y)=F_2(y)+\int_0^1 R_4(y,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta \qquad (23)$$

Предположим,что $F_3(y)$-известно, функция $\varphi_4(y)$ будем искать в классе функций удовлетворяющих условию Гельдера. Тогда $F_3(y)$ также удовлетворяеть условию Гельдера. Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений, решение уравнения (22) удовлетворяющей условию Гельдера выражается формулой [4] .

$$\varphi_4(y) = \int_0^1 \frac{F_3(\eta)}{\eta - y} d\eta \qquad (24)$$

Подставляя сюда выражения $F_3(y)$, получим интегральные уравнения Фредгольма второго рода[3].

$$\varphi_4(y) - \int_0^1 K_6(y,\eta)\varphi_4(\eta)d\eta = F_4(y) \qquad (25)$$

здесь

$$K_6(y,\eta) = \int_0^1 \frac{F_4(y,\eta)}{\eta - y} d\eta, \;\; F_4(y) = \int_0^1 \frac{F_2(\eta)}{\eta - y} d\eta$$

В силу условию теоремы функция $F_4(\eta)$ удовлетворяет условию Гёльдера. К уравнению (25) с ядром $K_6(y,\eta)$ применимы альтернативы Фредгольма. Разрешимость уравнения (25) следует из единственности решения поставленной задачи. Решения последнего интегрального уравнения представляется в виде

$$\varphi(y) = F_4(y) + \int_0^1 \Gamma_6(y,\eta)F_4(\eta)d\eta$$

где $\Gamma_6(y,\eta)$- резольвента ядра $K_6(y,\eta)$.

Подставив значение функции $\varphi_4(y)$ в (20) находим решение поставленной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ж. Адамар " Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа" –М.Наука, 1978

2. О. Сестранд O.Sur equation aux derivces partieless du type composite/Arkiv for Matematik, Astronomi och Fys.,1937,vol.26A,No 1.p.1-10.

3. Салохиддинов М. «Интегральные уравнения» Ташкент. 2007.

4. Мусхелишвили Н.И. "Сингулярные интегральные уравнения". 2018. Наука

5. Гозиев К.С «О единственности решения одной краевой задачи для уравнения высокого порядка составного типа» //Труды международной

научной конференции. «Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики» Ташкент. 2004. Том 1.