ФОРМУЛА ГРИНА

Зайнолобидинова Х.Р
ФДУ, студентка

Аннотация: *В работе приведены формула Грина. Формула Грина используется при решении примеров на интегрирование, где необходимо перейти от криволинейного интеграла к двойному интегралу и наоборот. Формула Грина устанавливает связь между этими интегралами.*

Ключовые слава: *Трапеция, интеграл, замкнутом контур, двойной интеграл, отрезки, функция.*

Джордж Грин был британским физиком-математиком, написавшим Эссе по применению математических методов. Анализ теорий электричества и магнетизма в 1828 году. В эссе были представлены несколько важных концепций, среди которых теорема, аналогичная современной теореме Грина, идее потенциальных функций, используемых в настоящее время в физике, и концепции того, что сейчас называется функциями Грина. Грин был первым, кто создал математическую теорию электричества и магнетизма, и его теория легла в основу работ других ученых, таких как Джеймс Клерк Максвелл, Уильям Томсон и других. Его работа по теории потенциала шла параллельно с работой Карла Фридриха Гаусса [1-3].

Теорема Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по односвязной области, ограниченной этим контуром. Фактически, эта теорема является частным случаем более общей теоремы Стокса. Теорема названа в честь английского математика Джорджа Грина. Она справедлива для любой конечной замкнутой области, которую можно разбить на конечное количество правильных для интегрирования областей.

Рассмотрим область (D) – «криволинейную трапецию» (рис. 1), ограниченную контуром (L), состоящим из кривых

(PQ): $y = y_0(x)$ $(a \le x \le b)$ и

(RS): $y = Y(x)$ $(a \le b \le x)$

и двух отрезков PS и QR, параллельных оси y.

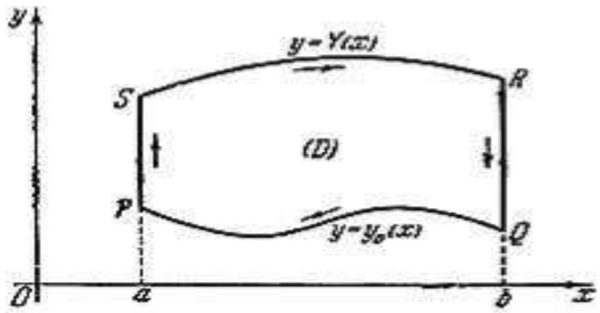

Рис.1. Криволинейная трапеция

Предположим, что в области (D) задана функция $P(x,y)$ непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Вычислим теперь двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

по формуле $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy$ мы получим $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$.

Внутренний интеграл здесь легко вычисляется с помощью первообразной функции $P(x,y)$, именно: $\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x,Y(x)) - P(x,y_0)$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dP}{dy} dxdy = \int_a^b P(x,Y(x))dx - \int_a^b P(x,y_0(x))dx .$$

Каждый из этих двух интегралов может быть заменен теперь *криволинейным интегралом*. В самом деле, вспоминая формулу

$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dx = (R)\int_a^b f(x,y(x))dx$, видим, что

$$\int_a^b P(x,Y(x))dx = \int\limits_{(SR)} P(x,y)dx$$

$$\int_a^b P(x,y_0(x))dx = \int\limits_{(PQ)} P(x,y)dx .$$

Отсюда

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(SR)} P(x,y)dx - \int\limits_{(PQ)} P(x,y)dx = \int\limits_{(SR)} P(x,y)dx + \int\limits_{(QP)} P(x,y)dx .$$

Желая ввести в рассмотрение интеграл по всему контуру (L) области (D), прибавим к правой части полученного равенства еще интегралы

$\int\limits_{(PS)} P(x,y)dx$ и $\int\limits_{(RQ)} P(x,y)dx$, очевидно, равные нулю, ибо отрезки (PS) и (RQ) перпендикулярны к оси x. Мы получим

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(PS)} Pdx + \int\limits_{(SR)} Pdx + \int\limits_{(RQ)} Pdx + \int\limits_{(QP)} Pdx.$$

Правая часть этого равенства представляет собой интеграл, взятый по всему замкнутому контуру (L), ограничивающему область (D), но в отрицательном направлении. В итоге мы получим следующее:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{(L)} P(x,y)dx. \qquad (1)$$

Хотя формула эта выведена в предположении правой ориентации осей, но, как легко убедиться, она сохраняется без изменения и при левой ориентации (лишь положительное направление обхода контура станет иным).

Выведенная формула справедливо и для областей более сложного вида, чем рассмотренная: достаточно предположить, что область (D) разлагается прямыми, параллельными оси y, на конечное число криволинейных трапеций указанного вида. Аналогично устанавливается и формула

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(L)} Q(x,y)dy \qquad (2)$$

в предположении, что функция Q непрерывна в области (D) вместе со своей частной производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$. При этом сначала за область (D) принимается криволинейная трапеция вида, изображенного на рис.2.

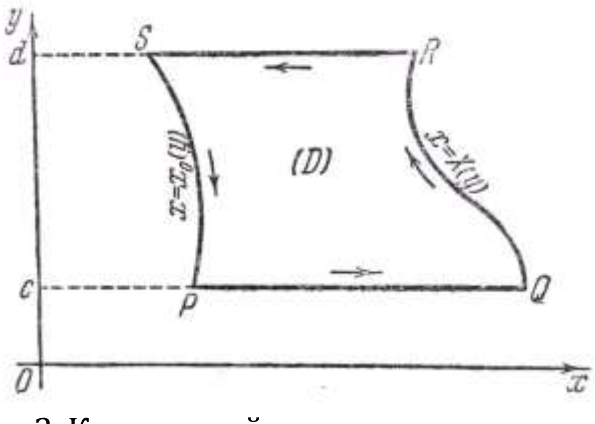

Рис.2. Криволинейная трапеция

Она ограничена кривыми

$(PS): x = x_0(y) \qquad (c \le y \le d)$

и

$(QR): x = X(y) \qquad (c \le y \le d)$

и двумя отрезками (PQ) и (RS), параллельными оси x. Затем формула обобщается, как и выше, на случай области, которая разлагается прямыми, параллельными оси x, на конечное число криволинейных трапеций этого вида.

Наконец, если область (D) одновременно удовлетворяет условиям обоих случаев, т. е. разлагается как на конечное число трапеций первого типа, так и (независимо от этого) на конечное число трапеций первого типа, то для нее справедливы обе формулы (1) и (2), конечно, в предположении непрерывности функций P, Q и их производных $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Вычитая формулу (1) из (2), получаем

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (3)$$

Это и есть формула Грина.

Формулы, выражающие площадь криволинейными интегралами, легко получаются отсюда, как частные случаи. Например, полагая $P = -y$, $Q = 0$ и воспользовавшись очевидным равенством $\iint_{(D)} dxdy = D$, придем к формуле

$$\int_{(PQ)} ydy = \int_a^b y_0(x)dx, \quad \int_{(SR)} ydx = \int_a^b Y(x)dx$$

Здесь можно придать условиям, при которых справедлива формула (3), более обозримую форму. Именно, можно доказать, что формула Грина имеет место для любой области (D), ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами[4-6].

Пусть (L) будет общий контур нашей области. Повторяя рассуждения , впишем в (L) ломанную (Λ) (имеющую две наперед фиксированные вершины) и рассмотрим ограниченную ею многоугольную область (Δ). Предположим, для простоты, что функции P и Q определены, непрерывны и имеют непрерывные же производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ и вне области (D), скажем, в некотором – содержащем (D) внутри себя – прямоугольнике (R). Можно считать, что и содержится (Δ) в (R).Так как многоугольная область, очевидно, может быть разложена на трапеции как одного, так и другого типа, то к ней формула Грина приложима:.

$$\int_{(A)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (4)$$

Лемма. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в открытой области (E), а (L) - содержащаяся в ней кривая указанного класса. Если вписать в (L) ломанную Λ, то при стремлении к нулю наибольшей из ее сторон будет иметь

$$\lim_{x\to\infty} \int_{(\Lambda)} Pdx + Qdy = \int_{(L)} Pdx + Qdy.$$

Замечание. Доказанное утверждение в некотором смысле может быть распространено и на случай замкнутой простой кривой (L), если разложить ее на две незамкнутые кривые и к каждой из последних в отдельности применить лемму. Предельный переход здесь ограничен требованием, чтобы в числе точек деления были две наперед фиксированные точки.

Когда длина наибольшей из сторон ломанной Λ стремится к нулю, левая часть равенства (4) стремится к левой части равенства (3), в силу леммы (и замечания к ней).

С другой стороны, ломанную можно выбрать так , чтобы она лежала вне многоугольной области (A) и внутри многоугольной области (B), соответственно входящей и выходящей по отношению к (D), площади которых разнятся произвольно мало:

B-A ‹ ε

Можно считать, что (A) и (B) содержаться в упомянутом раньше прямоугольнике (R). Имеем, полагая для краткости $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$:

$$\left|\iint\limits_{(D)} f dxdy - \iint\limits_{(\Delta)} f dxdy\right| = \left|\iint\limits_{(D)-(A)} f dxdy - \iint\limits_{(\Delta)-(A)} dxdy\right| \leq \iint\limits_{(D)-(A)} |f| dxdy + \iint\limits_{(\Delta)-(A)} |f| dxdy \leq \iint\limits_{(B)-(A)} |f| dxdy \langle 2M\varepsilon ,$$

где M есть наибольшее значение $|f|$ в (R). Отсюда ясно, что правая часть равенства (4) при упомянутом предельном переходе стремится к правой части формулы (3). Таким образом, справедливость этой формулы установлена.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Анкилов А. В. Высшая математика (Часть 2): учебное пособие / Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Решетников Ю. А.; под общей редакцией Вельмисова П. А. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. 312 с.
2. Бохан К. А. Курс математического анализа. Т. II. / Бохан К. А., Егорова И. А., Лащенов К. В., – М.: издательство «Просвещение», 1966. 268 с.
3. Будаев В. Д. Математический анализ для студентов-физиков. Часть 2. Дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения / Будаев В.Д.,Василенков В. Д. – Смоленск: СГПИ, 1997. 375 с.
4. Бутузов В. Ф. Лекции по математическому анализу. Часть II. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2014. 200 с.
5. Ильин В.А. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. – 5-е изд./ Ильин В. А., Позднякс Э. Г. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 276 с.
6. Короткова Н.Н. Математический анализ (II часть): учеб. пособие/ Короткова Н. Н., Мустафина Д. А., Ребро И. В.– Волгоград: ВПИ (филиал) ВолгГТУ, 2010. 196 с.