VEYL-TITCHMARSH FUNKSIYASI VA SPEKTRAL FUNKSIYA ORASIDAGI MUNOSABAT .

Eshtemirov Eshtemir Salim o‘g’li, Abdurashidov Nuriddin G’iyoziddin o‘g’li
[1] Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Aniq va tabiiy fanlar fakulteti Matematika va fizika kafedrasi stajyor o’qituvchi
[2] Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Aniq va tabiiy fanlar fakulteti Matematika va fizika kafedrasi stajyor o’qituvchi
Surxondaryo,O’zbekiston
eshtemireshtemirov577@gmail.com. nuriddinabdurashidov9550@gmail.com

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ВЕЙЛЯ-ТИЧМАРША И СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ.

Эштэмир Эштэмиров, Нуриддин Абдурашидов
[1] Преподаватель-стажер кафедры математики и физики факультета точных и естественных наук Деновского института предпринимательства и педагогики
[2] Преподаватель-стажер кафедры математики и физики факультета точных и естественных наук Деновского института предпринимательства и педагогики
Сурхандарьинская,Узбекистан
eshtemireshtemirov577@gmail.com. nuriddinabdurashidov9550@gmail.com

THE RELATIONSHIP BETWEEN THE WEIL-TICHMARSCH FUNCTIONS AND THE SPECTRAL FUNCTION.

Eshtemir Eshtemirov, Nuriddin Abdurashidov
[1] Trainee teacher at the Department of Mathematics and Physics, Faculty of Exact and Natural Sciences, Denov Institute of Entrepreneurship and Pedagogy
[2] Trainee teacher at the Department of Mathematics and Physics, Faculty of Exact and Natural Sciences, Denov Institute of Entrepreneurship and Pedagogy
Surkhandarya,Uzbekistan
eshtemireshtemirov577@gmail.com. nuriddinabdurashidov9550@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqola nazariy xarakterga ega. Maqolada yarim o’qda berilgan SHturm-Liuvill chegaraviy masalasi hamda Veyl-Titchmarsh funksiyasi va spektral funksiya orasidagi bog’lanish o’rganiladi. Veylning nuqta holi ma’lum bo’ldi, Shturm-Liuvill operatori va spektral funksiya o’rnatildi, Shturm-Liuvill masalasining spektral funksiyasining yechimi aniqlandi, keltirilgan usul va natijalar olindi. Maqola* *ishida olingan natijalar nazariy xarakterga ega boʻlib, singulyar Shturm-Liuvill operatorlari ushun toʻgʻri masalalarni yechishda foydalanish mumkin boʻladi.*

Аннотация: *Данная статья носит теоретический характер. В статье исследуется краевая задача Штурма-Лиувилля, заданная на полуоси, и связь между функцией Вейля-Тичмарша и спектральной функцией. Был известен точечный случай Вейля, установлены оператор Штурма-Лиувилля и спектральная функция, найдено решение спектральной функции задачи Штурма-Лиувилля, получены изложенные метод и результаты. Результаты, полученные в работе статьи, носят теоретический характер, и для решения этих точных задач могут быть использованы сингулярные операторы Штурма-Лиувилля.*

Annotation: *This article is theoretical in nature. The article examines the SHturm-Liouville boundary value problem given on the semi-axis and the connection between the Weyl-Titchmarsh function and the spectral function. The Weyl point case was known, the Sturm-Liouville operator and the spectral function were established, the solution of the spectral function of the Sturm-Liouville problem was determined, and the presented method and results were obtained. The results obtained in the work of the article are of a theoretical nature, and the singular Sturm-Liouville operators can be used to solve these exact problems.*

Kalit so'zlar: *Yarim o'qda berilgan SHturm – Liuvill chegaraviy masalasi, Veyl-Titchmarsh funksiya, Spektral funksiya, Xos qiymat.*

Ключевые слова: *Краевая задача Штурма-Лиувилля, заданная на полуоси, Функция Вейля-Тичмарша, Спектральная функция, Внутренняя ценность.*

Key words: *Sturm-Liouville boundary value problem, eigenvalue, spectral function, spectr, direct problem.*

Ilmiy tadqiqot metodlari. Ishni bajarishda matematik analiz, funksional analiz, chiziqli operatorlar spektral nazariyasi va differensial tenglamalar nazariyasi usullari qoʻllaniladi. [1]:

Teorema 1. Agar m(τ) – Veyl nuqtasi yoki veyl doirasiga tegishli bo'lgan biror nuqta bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\tau \in C\backslash R$ kompleks son uchun ushbu

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \tau(y), \\ \quad y'(0) = hy(0), \end{cases} \quad (0 \le x \le \infty),$$ (bu yerda q(x)$\in [0,\infty)$ haqiqiy funksiya,

h ixtiyoriy haqiqiy son va τ kompleks parametr) tenglamaning

$$\varphi(x,\tau) = \theta(x,\tau) + m(\tau)\omega(x,\tau)$$

yechimi $L^2(0,\infty)$ fazoga tegishli bo'ladi hamda quydagi tengsizlikni qanoatlantiradi: [1]:

$$\int_0^\infty |\varphi(x,\tau)|^2 dx \le -\frac{Imm(\tau)}{Im\tau}$$

Ta'rif 1. $\varphi(x,\tau) = \theta(x,\tau) + m(\tau)\omega(x,\tau)$ yechimga Veyl yechimi, m(τ) funksiyaga esa Veyl-Titchmarsh funksiyasi deyladi.

Teorema 2. Agar (a,b) oraliqning chetki nuqtalari $\rho(\lambda)$ spektral funksiyaning uzluksizlik nuqtalaridan iborat bo‘lsa, u holda

$$\rho(b)-\rho(a)=-\frac{1}{\pi}\int_a^b \operatorname{Im}\{m(u+iv\}\,du \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-Natija. Spektral funksiyaning xos qiymatdagi sakrash uzunligi Veyl-Titchmarsh funksiyasining shu nuqtadagi chegirmasiga teng: [1],[2]::

$$\rho(\lambda_0+0)-\rho(\lambda_0-0)=\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_0} m(\lambda). \qquad (2.1)$$

Ushbu

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \qquad (0\le x\le b), \qquad (3.1)$$

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0, \qquad (3.2)$$

chegaraviy masalani qaraymiz. Bu yerda $q(x)\in C[0,\infty)$ haqiqiy funksiya, $\alpha\in R^1$ haqiqiy son.

Agar $\sin\alpha\neq 0$ bo‘lsa, u holda (3.2) chegaraviy shartni

$$y'(0)-hy(0)=0, \qquad h=-ctg\,\alpha, \qquad (3.3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (3.1) formula (3.2) chegaraviy shart bajarilganda keltirib chiqarilgan edi. Shuning uchun

$m(z)=-\text{ctg}\,\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(\lambda)}{z-\lambda}$, $(\sin\alpha\neq 0)$ formuladagi $m(z)$ va $\rho(\lambda)$ funksiyalarni mos ravishda $m_\alpha(z)$ va $\rho_\alpha(\lambda)$ orqali belgilaymiz. Agar (3.1)+(3.3) chegaraviy masalaning spektral funksiyasini $\rho_h(\lambda)$ orqali belgilasak, u holda $\rho_\alpha(\lambda)$ va $\rho_h(\lambda)$ funksiyalar o‘zaro quyidagi formulalar bilan bog‘langan:

$$\rho_\alpha(\lambda)=\frac{1}{sin^2\alpha}\cdot\rho_h(\lambda), \qquad (3.4)$$

Shuning uchun (3.1) formulani quyidagicha ko‘rinishda yozish mumkin:

$$m_\alpha(z)=-ctg\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{z-\lambda}=h+\frac{1}{sin^2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho_h(\lambda)}{z-\lambda}. \qquad (3.5)$$

Ikkinchi tomondan $\rho_h(\lambda)$ spektral funksiya uchun quyidagi asimptotik formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\rho_h(\lambda)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}-h+\rho_h(-\infty)+\bar{\bar{o}}(1), \qquad (3.6)$$

Spektral funksiyaning bu asimptotik formulasidan va (3.5) formuladan Veyl-Titchmarshning $m_\alpha(z)$ funksiyasi uchun asimptotik formula topishimiz mumkin. [1], [2]:

Teorema 3. (3.1) + (3.2) chegaraviy masalaning $m_\alpha(z)$ Veyl-Titchmarsh funksiyasi uchun ushbu $\delta<\arg z<\pi-z$ sohada quyidagi asimptotik formula o‘rinli:

$$m_\alpha(z)=-ctg\alpha-\frac{i}{\sqrt{z}sin^2\alpha}+\frac{ctg\alpha}{zsin^2\alpha}+\bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z|\to\infty, \qquad (3.7)$$

Bu yerda $\delta>0$ - biror musbat son. [1]:

Misol: Ushbu

$$\begin{cases} -y'' - \dfrac{2a^2}{ch^2 ax} y = \lambda y\,, \qquad 0 \le x < \infty \\ y'(0) - hy(0) = 0, \end{cases}$$

Shturm-Liuvill masalasining spektral funksiyasini topamiz.

Ma’lumki masalada berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi: [3]:

$$y = C_1\left(\cos\sqrt{\lambda}x - athax\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + athax\cos\sqrt{\lambda}x\right).$$

Quyidagi

$$\begin{cases} \theta(x,0) = 0\,, \\ \theta'(x,0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x,0) = 1\,, \\ \varphi'(x,0) = h \end{cases}$$

boshlanich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\theta(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda + a^2}\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + athax\cos\sqrt{\lambda}x\right),$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x - ath(ax)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{h}{\lambda + a^2}\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + athax\cos\sqrt{\lambda}x\right),$$

$q(x) \equiv 0$ koeffitsiyent quyidan chegaralanganligi uchun Veylning nuqta holi o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu

$\psi(x,\lambda) = \theta(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$ funksiya $L^2(0,\infty)$ fazoga tegishli bo‘ladigan qilib, $m(\lambda)$ funksiyani tanlaymiz. Buning uchun quyidagicha ifodalashni bajaramiz: [3], [4]:

$$\theta(x,\lambda) + m(\lambda)\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda + a^2}\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + athax\cos\sqrt{\lambda}x\right) +$$

$$+m(\lambda)\left(\cos\sqrt{\lambda}x - ath(ax)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{h}{\lambda + a^2}\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + athax\cos\sqrt{\lambda}x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{athax}{\lambda + a^2} - \frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda + a^2} + m(\lambda) + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}m(\lambda)athax - \frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda + a^2}m(\lambda) \right.$$
$$\left. + \frac{h}{\lambda + a^2}m(\lambda)athax\right\}e^{i\sqrt{\lambda}x} +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{athax}{\lambda + a^2} + \frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda + a^2} + m(\lambda) - \frac{i}{\sqrt{\lambda}}m(\lambda)athax + \frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda + a^2}m(\lambda) \right.$$
$$\left. + \frac{h}{\lambda + a^2}m(\lambda)athax\right\}e^{-i\sqrt{\lambda}x}, \tag{4}$$

Kompleks ildizning ushbu

$$\sqrt{u+iv}=\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}\ ,\quad v>0,$$

shoxchasini tanlash qabul qilinganligi uchun $\operatorname{Im}\lambda>0$ bo‘lganda

$e^{i\sqrt{\lambda}x}\in L^2(0,\infty)$ va $e^{-i\sqrt{\lambda}x}\notin L^2(0,\infty)$,

bo‘ladi. Demak, (4) tenglikda ikkinchi qavs ichidagi ifodani nolga tenglaymiz:

$$\frac{athax}{\lambda+a^2}+\frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}+m(\lambda)-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}m(\lambda)athax+\frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}m(\lambda)+$$

$$+\frac{h}{\lambda+a^2}m(\lambda)athax=0\,,$$

$$\frac{a}{\lambda+a^2}+\frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}+m(\lambda)-\frac{ia}{\sqrt{\lambda}}m(\lambda)+\frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}m(\lambda)+\frac{h}{\lambda+a^2}m(\lambda)a=0,$$

$$\frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}+m(\lambda)+\frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}m(\lambda)=0$$

$$m(\lambda)=\left(-\frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{ih\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2}}=-\frac{i\sqrt{\lambda}}{\lambda+a^2+ih\sqrt{\lambda}}=$$

$$=-\frac{i\sqrt{\lambda}(\lambda+a^2)+h\lambda}{(\lambda+a^2)^2+h^2\lambda};$$

Demak,

$$\operatorname{Im}\{m(\lambda)\}=-\frac{(\lambda+a^2)\sqrt{\lambda}}{(\lambda+a^2)^2+h^2\lambda}\,,\qquad\qquad \lambda>0,$$

bo‘ladi.

Natija. Ushbu $m(\mathrm{z})=-\operatorname{ctg}\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(\lambda)}{z-\lambda}$, $(\sin\alpha\neq0)$ tenglikga asosan quyidagi ifodaga kelamiz:

$$\rho'(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda+a^2)\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+a^2)^2+h^2\lambda}, & \lambda>0,\\ \qquad 0, & \lambda\leq0,\end{cases}$$

$$\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{(t+a^2)\sqrt{t}}{(t+a^2)^2+h^2t}dt\,, & \lambda>0,\\ \qquad 0, & \lambda\leq0.\end{cases}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Амбарцумян В.А. “Uber eine Frage der Eigenwertteorie.-Zeitschr”, Fur Physik, 1929. Bd. 53, s. 690-695.
2. Бойкузиев К.Б., “Дифференциал тенгламалар”, Тошкент 1983.

3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. “Введение в спектральную теорию”, М.: Наука, 1970, 672с.

4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. “Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака”, М.: Наука, 1988.

5. Марченко В.А. “Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения”, Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.

6. Марченко В.А. “Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн”, - ДАН СССР, 1955, 104, с. 695-698.

7. Салохиддинов М.С., Насриддинов Ғ.Н. “Оддий дифференциал тенгламалар”, Тошкент, 2009-йил.

8. Титчмарш Э.Ч., “Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка” : В 2-х т. - М.: ИЛ, 1961, т. 2.

9. Шабат Б.П. “Введение в комплексный анализ”, М.: «Наука», 1969.

10. Hasanov A.B., “Shturm – Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish”, I-qism, «Fan» nashriyoti, Toshkent - 2011.

11. Неъматов А.Б., Эштемиров Э.С. “Ҳар хил чексизликда турли - зонали потенциялларга яқин потенциалли Штурм – Лиувилл оператори ушун сочилиш назарияси берилганларининг асосий хоссалари” “Долзарб муаммолар ва ривожланиш тенденциялари” Республика илмий - амалий анжумани материаллари 1-қисм. Жиззах 2022 йил.

12. Неъматов А.Б., Эштемиров Э.С. Yarim o'qda berilgan Shturm-Liuvill chegaraviy masalasi hamda Veyl-Titchmarsh funksiyasi va spectral funksiya orasidagi bog'lanish. Международная онлайн-конференция академических наук, Россия. Выпуск 21, часть 2, стр.4-7. 31май, 2022.

13. www.lib.math.msu.ru internet sahifasi(Rossiya).

14. www.mathlinks.ro internet sahifasi(Ruminiya).

15. www.zaba.ru internet sahifasi(Rossiya)