PARAMETRLANGAN KVADRAT FUNKSIYA BIFURKATSIYASI

Mo'minov Ulug'bek Raximjonovich
Farg'ona davlat universiteti tayanch doktoranti

Annotatsiya. *Ba'zi funksiyalar yetarli darajada sodda bo'lishiga qaramay ularning dinamikasi hayratlanarli darajada murakkabligini ko'rishimiz mumkin. Odatda bifurkatsiya qo'zg'almas nuqtalarda paydo bo'ladi. Shuning uchun ham bu ishda dastlab* $Q(x)$ *kvadrat funksiyaning qo'zg'almas nuqtalari topilgan. Bu nuqtalar atrofida funksiyaning harakteristikasi o'rganilgan.*

Kalit so'zlar. *Kvadrat funksiya, bifurkatsiya, qo'zg'almas nuqta, tortuvchi qo'zg'almas nuqta, itaruvchi qo'zg'almas nuqta, neytral qo'zg'almas nuqta.*

Kirish qismi. Parametrning ma'lum qiymatlarida dinamikalar birdan o'zgaradi, shundan so'ng ular yana uzoq vaqt davomida doimiy bo'lib qoladi. Bunday keskin o'zgarishga bifurkatsiya deyiladi. Bifurkatsiya tushunchasini Robert L. Devaney, Richard_A. Holmgren va boshqalar o'rganishgan. Ularning kitoblarida kvadrat funksiyaning dinamikasi hususiy hollarda o'rganilgan.

Asosiy qism. Biz xaqiqiy sonlar maydonida $Q(x)=ax^2+bx+c$ kvadrat funksiyalar oilasini ko'rib chiqamiz. Bu yerda a,b,c lar parametrlar. Bizning maqsadimiz $Q(x)$ ning dinamikasi qanday o'zgarib turishini tushuntirishdan iborat.

Ta'rif 1. Bizga $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar $f(c)=c$ bo'lsa, u holda $x=c$ nuqtaga $f(x)$ funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi [2].

Ta'rif 2. Faraz qilaylik x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun qo'zg'almas nuqta bo'lsin. Agar $|f'(x_0)|<1$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta tortuvchi qo'zg'almas nuqta, agar $|f'(x_0)|>1$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta itaruvchi qo'zg'almas nuqta, agar $|f'(x_0)|=1$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta neytral yoki befarq qo'zg'almas nuqta deyiladi [1].

Bizning maqsadimiz $Q(x)$ ning qo'zg'almas nuqtalarini topish hamda ularning dinamikasini o'rganishdan iborat bo'ladi. Buning uchun $ax^2+bx+c=x$ tenglamani yechamiz. Ushbu

$$ax^2+(b-1)x+c=0$$

tenglamada $d=b-1$ deb olsak tenglama quyidagi ko'rinishdagi to'la kvadrat tenglamadan iborat bo'ladi:

$$ax^2+dx+c=0$$

Bu tenglamaning ildizlari $p_+=\dfrac{\sqrt{d^2-4ac}-d}{2a}$ va $p_-=-\dfrac{\sqrt{d^2-4ac}+d}{2a}$ ko'rinishlarda bo'ladi. Demak $Q(x)$ ning ikkita qo'zg'almas nuqtasi mavjud. Bu ikkala qo'zg'almas nuqta $d^2-4ac\geq 0$ bo'lganda xaqiqiy bo'ladi. Agar $d^2-4ac=0$ bo'lganda

$p_+ = p_- = -\dfrac{d}{2a}$. $d^2 - 4ac < 0$ bo'lganda esa, xaqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lmaydi. Barcha orbitalari cheksizlikka intiladi.

Dastlab $a > 0$ bo'lgan holga to'xtalamiz.

Agar $c \le 0$ bo'lsa $d^2 - 4ac \ge 0$ bo'lib p_+ va p_- qo'zg'almas nuqtalar mavjud bo'ladi.

Agar $c > 0$ bo'lsa, u holda $d \in \left(-\infty; -2\sqrt{ac}\right) \cup \left(2\sqrt{ac}; +\infty\right)$ bo'lganda

p_+ va p_- qo'zg'almas nuqtalar mavjud bo'ladi. Bifurkatsiya odatda $Q(x)$ning qo'zg'almas nuqtalarida sodir bo'ladi. Endi biz qo'zg'almas $P_\pm$ nuqtalarni tortuvchi, itaruvchi yoki neytralligini aniqlaymiz:

$$Q'(x) = 2ax + b;$$

$$Q'(P_+) = 2a\frac{\sqrt{d^2 - 4ac} - d}{2a} + b = \sqrt{d^2 - 4ac} + 1;$$

$$Q'(P_-) = 2a\left(-\frac{\sqrt{d^2 - 4ac} + d}{2a}\right) + b = 1 - \sqrt{d^2 - 4ac}.$$

Agar $c < 0$ bo'lsa, u holda $Q'(P_+) > 1$ bo'lib, P_+ nuqta giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda $Q'(P_+) = |d| + 1$. Bu holda $d = 0$ bo'lsa P_+ nuqta neytral qo'zg'almas nuqta, $d \ne 0$ bo'lsa P_+ nuqta giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Agar $c > 0$ bo'lsa $d^2 - 4ac > 0$ bo'lganda P_+ itaruvchi qo'zg'almas nuqta, $d^2 - 4ac = 0$ bo'lganda neytral qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $d^2 - 4ac < 0$ bo'lganda esa qo'zg'almas nuqta mavjud emas, ya'ni barcha orbitalari cheksizlikka intiladi.

Yoqoridagi natijalardan biz quyidagi tasdiqlarga ega bo'lamiz:

Tasdiq1. P_+ qo'zg'almas nuqta:

1) $c < 0$ bo'lganda itaruvchi,
2) $c = 0,\ d = 0$ bo'lganda neytral,
3) $c = 0,\ d \ne 0$ bo'lganda itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

Ikkinchi qo'zg'almas nuqta P_- ning dinamikasini ko'rib chiqamiz. $|Q'(P_-)| < 1$ tengsizlikni qaraymiz:

$$\left|1 - \sqrt{d^2 - 4ac}\right| < 1.$$

Bu tengsizlikni yechib $0 < d^2 - 4ac < 4$ natijaga ega bo'lamiz.

Bu holda P_- nuqta giperbolik tortuvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $d^2 - 4ac = 0$ bo'lganda P_- nuqta neytral qo'zg'almas nuqta bo'ladi. $|Q'(P_-)| > 1$, ya'ni $d^2 - 4ac > 0$ bo'lganda esa giperbolik itaruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

Tasdiq2. P_- qo’zg’almas nuqta:

1) $0 < d^2 - 4ac < 4$ bo’lganda tortuvchi,

2) $d^2 - 4ac = 0$ bo’lganda neytral,

3) $d^2 - 4ac > 4$ bo’lganda itaruvchi qo’zg’almas nuqta bo’ladi.

$a < 0$ bo’lganda ham shu kabi o’rganiladi.

Xulosa. Ushbu ishda kvadrat funksiya dinamikasini umumiy holda o’rganilgan. Parametrga bog’liq bo’lgan holda qo’zg’almas nuqtalari topilgan. So’ng bu qo’zg’almas nuqtalarning harakteristikalari o’rganilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YHATI:

1. Robert L. Devaney . A First Course in Chaotic Dynamical Systems.
2. Richard_A. Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems.
3. А.Н.Шарковский, С.Ф.Коляда, А.Г.Сивак, В.В.Федоренко. «Динамика одномерных отображений». КИЕВ НАУКОВА ДУМКА. 1989.