ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ТОЧЕК ДВУХ РАДИУСОВ КРУГА.

К.Азимов
- Старший преподаватель кафедры "Высшая математика"
Джизакский политехнический институт, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье оценивается устойчивость для продолжения бигармонической функции из конечного числа точек двух радиусов круга.*

Ключевые слова: *Абсолютно интегрируемая функция, гармонические и бигармонические функции, устойчивость решения, аналитические продолжения*

BIGARMONIK FUNKSIYANI DOIRA IKKI RADIUSINING CHEKLI NUQTASIDAN DAVOM ETTIRISH UCHUN TURG'UNLIGINI BAHOLASH

Azimov Q
- Jizzakh politexnika instituti "Oliy matematika" kafedrasi
katta o'qituvchisi, Uzbekistan

Annotyatsiya: *Ushbu maqolada bigarmonik funksiyani doira ikki radiusining chekli nuqtalaridan davom ettirish turg'unligi baholanadi.*

Kalit so'zlar: *absolyut integrallanuvchi funksiya, garmonik va bigarmonik funksiyalar, yechimning turg'unligi, analitik davom ettirish*

ESTIMATION OF STABILITY FOR CONTINUING A BIHARMONIC FUNCTION FROM A FINITE NUMBER OF POINTS OF TWO RADIUS OF A CIRCLE.

K .Azimov
– Senior lecturer of department higher mathematics
Jizzakh politechnical institute, Uzbekistan

Annotation: *This paper evaluates the stability of the continuation of the harmonic function from the finite points of the two radii of the circle.*

Keywords; *Абсолютно интегрируемая функция, гармонические и бигармонические функции, устойчивость решения, аналитические продолжения*

Классы гармонических и бигармонических функций в разное время были изучались выдающимся математиками как Г.В. Колосов ,Ф.Д. Гахов, И. И. Мусхелишвили и другими учёными. Известно что многие задачи механики сплошных сред приводят к гармонической и бигармонической проблеме. В работе [1] приводится замечательное представление бигармонической функции через гармонической функции.

Постановка задачи:

$$\Delta^2 u = 0, (r,\varphi) \in D(R) \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\left|u(r_k,\varphi_j)\right| \le \varepsilon_1 \qquad (2)$$

$$\left|\Delta u(r_k,\varphi_j)\right| \le \varepsilon_2 \qquad (3)$$

где $r_k \in (0,1]$, $k = 1,2,3,\ldots m, \varphi_j = [0,2\pi], \varepsilon_j -$ заданные числа, j=1,2.

Решение задачи **(1)-(3)** рассмотрим в множестве функций удовлетворяющих условий:

$$\left|u(r,\varphi)\right| \le M_1, (r,\varphi) \in \overline{D(R)}, \quad \varphi_j = [0,2\pi] \qquad (4)$$

$$\left|\Delta u(r,\varphi)\right| \le M_2, (r,\varphi) \in \overline{D(R)}, \ \varphi_j = [0,2\pi] \qquad (5)$$

***ТЕОРЕМА.* Пусть выполняется следующие условия:**

1 . числа $\varepsilon_j -$ j=1,2 **и натуральные числа m связаны соотношениями**

$$\varepsilon_1 = 2M_4 \frac{R}{R-\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m + M_2 S \qquad (6)$$

$$\varepsilon_2 = 4M_2 \frac{R}{R-\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m, 1 \le \rho \le R, R \ge 4e \qquad (7)$$

2 . $\varphi_j, j = 1,2$ **такие , что** $\left|\sin m(\varphi_2 - \varphi_1)\right| \le \dfrac{\theta}{m^\sigma}, 0 < \theta < 1, 1 < \sigma < \infty.$

3. числа $r_k = \dfrac{k}{m}, k \in \overline{1,m}$**, равностоящие узлы на** $(0,1]$.

Тогда для решения задачи **(1)-(3)** в круге $D(\rho)$**,** $\rho \in \left[1, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{2R}{e}}\right]$ имеет место оценка $\left|u(r,\varphi)\right| \le \left(1 + \dfrac{2e[2e(\rho+1)]^{m-1}}{\sqrt{2\pi m}}\right)(\varepsilon_1(1+S_1) + S_2(S_2+S_3))$.

Доказательство. Решение уравнения (1) представляется формулой [1] $u(r,\varphi) = r^2 u_1(r,\varphi) + u_2(r,\varphi)$ для неё

$$\Delta u(r,\varphi) = 4u_1(r,\varphi) + 4r\frac{\partial u_1(r,\varphi)}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty}(4+4k)(a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^k$$

поэтому при $r = R$ имеем $\Delta u(R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}(4+4k)(a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi)$.

где $a_0^1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u_1(R,\varphi)d\varphi, a_k^1 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(R,\varphi)\cos k\varphi d\varphi, b_k^1 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(R,\varphi)\sin k\varphi d\varphi, k = 1,2,3,\ldots.$

Пусть $\Delta u(R,\varphi)$ -абсолютно интегрируемая функция в $[-\pi;\pi]$. Тогда

$$a_0^2=\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta u_1(R,\varphi)d\varphi, a_k^2=\frac{1}{4(k+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta u_1(R,\varphi)\cos k\varphi d\varphi, b_k^1=\frac{1}{4(k+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta u_1(R,\varphi)\sin k\varphi d\varphi, k=1,2,3,...$$

Используя условия (5) получим

$$\left|a_0^2\right|\le\frac{M_2}{4},\left|a_k^2\right|\le\frac{M_2}{2+2k},\left|b_k^1\right|\le\frac{M_2}{2+2k},k=1,2,3,.$$

Таким , образом из

$$u_1(r,\varphi)=\frac{a_0^1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^1\cos k\varphi+b_k^1\sin k\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^k$$

Получим $\left|u_1(r,\varphi)\right|\le\frac{M_2}{8}+\frac{M_2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{r}{R}\right)^k$

Оценим $u_1(r,\varphi)$ в круге радиуса ρ.

$$\left|u_1(r,\varphi)\right|\le\frac{M_2}{8}+\frac{M_2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{r}{R}\right)^k=M_3,(r,\varphi)\in G(\rho).$$

Тогда из

$$\left|u_2(r,\varphi)\right|-r^2\left|u_1(r,\varphi)\right|\le\left|u_2(r,\varphi)\right|+r^2\left|u_1(r,\varphi)\right|\le M_1,$$

Следует , что $\left|u_2(r,\varphi)\right|\le M_1+\rho^2M_3=M_4,(r,\varphi)\in G(\rho).$

Функция $u_j(r,\varphi)$ представляется в видах

$$u_j(r,\varphi)=\frac{a_0^j}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^j\cos k\varphi+b_k^j\sin k\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^k, j=1,2.$$

Аналитическая продолжения функций $u(r,\varphi_j)$ и $\Delta u(r,\varphi_j)$ из $(0;R]$ в область $G(R)=\{z:|z|<R\}$ представляется в видах $f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^jz^k, v_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k^jz^k$ где

Оценим коэффициентов $c_k^j=\frac{f_j^{(k)}(0)}{k!},d_k^j=\frac{v_j^{(k)}(0)}{k!},k=0,1,2,...j=1,2.$ c_k^j и d_k^j

$$\left|c_0^j\right|\le\frac{M_2}{4},\left|c_1^j\right|\le\frac{1}{R}(\left|a_1^2\right|+\left|b_1^2\right|)\le\frac{2M_4}{R}, j=1,2.$$

$$\left|d_k^j\right|\le\left\{\left|a_k^1\right|+\left|b_k^1\right|\right\}\frac{4(k+1)}{R^k}\le\frac{4(k+1)}{R^K}\left\{\frac{2M_2}{2(k+1)}\right\}=\frac{4M_2}{R^k},$$

$$\left|c_k^j\right|\le\left\{\left|a_k^1\right|+\left|b_k^1\right|+\left|a_{k-2}^1\right|+\left|b_{k-2}^1\right|\right\}\frac{1}{R^k}\le\frac{2}{R^k}\left\{M_4+\frac{M_2}{k-1}\right\}, j=1,2.,k=1,2,....$$

В круге $\overline{G(\rho)}$ оценим функций $f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^jz^k, v_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k^jz^k$, для этого представим в виде $f_j(z)=f_{j,m-1}(z)+F_{j,m}(z)$ и $v_j(z)=v_{j,m-1}(z)+V_{j,m}(z)$

где

$$f_{j,m-1}(z)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k^jz^k,F_{j,m}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}c_k^jz^k \text{ и } v_{j,m-1}(z)=\sum_{k=0}^{m-1}d_k^jz^k,V_{j,m}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}d_k^jz^k,\ j=1,2.,$$

Оценим функций $F_{j,m}(z)$ и $V_{j,m}(z)$ в круге $G(\rho)$

$$\left|F_{j,m}(z)\right| \le \sum_{k=m}^{\infty}\left|c_k^j\right|\left|z\right|^k \le \sum_{k=m}^{\infty}\frac{2}{R^k}\left\{M_4+\frac{M_2}{2(k-1)}\right\}\rho^k = 2\sum_{k=m}^{\infty}\left\{M_4+\frac{M_2}{2(k-1)}\right\}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \le$$

$$2M_4\frac{R}{R-\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m + M_2 S = \varepsilon_1.$$

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^j z^k, v_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k^j z^k$$

$$\left|V_{j,m}(z)\right| \le \sum_{k=m}^{\infty}\left|d_k^j\right|\left|z\right|^k \le \sum_{k=m}^{\infty}4M_2\left(\frac{\rho}{R}\right)^m = 4M_2\left(\frac{R}{R-\rho}\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^m = \varepsilon_2.$$

Для оценки полиномов $f_{j,m-1}(z), v_{j,m-1}(z)$ Пользуемся интерполяционными формулами Лагранжа

$$f_{j,m-1}(z)=\sum_{k=1}^{m-1}f_{j,m-1}(r_k)\prod_{\substack{q=1\\q\ne k_n}}\frac{z-z_q}{z_k-z_q} \quad \text{и} \quad v_{j,m-1}(z)=\sum_{k=1}^{m-1}v_{j,m-1}(r_k)\prod_{\substack{q=1\\q\ne k_n}}\frac{z-z_q}{z_k-z_q}.$$

Из результатов предыдущих задач [3] следует что справедливы оценки в круге $G(\rho)$.

$$\left|f_{j,m-1}(z)\right| \le \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \quad \text{и} \quad \left|v_{j,m-1}(z)\right| \le \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}$$

Таким образом , для функций $f_j(z), v_j(z)$ в круге $G(\rho)$ имеем оценки

$$\left|f_j(z)\right| \le \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \quad \text{и} \quad \left|v_j(z)\right| \le \varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}$$

Из этих оценок по неравенству Коши имеем

$$\left|f_j^{(k)}(0)\right| \le \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}\left(\frac{k!}{\rho^k}\right) \quad \text{и} \quad \left|v_j^{(k)}(0)\right| \le \varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}\left(\frac{k!}{\rho^k}\right)$$

Отсюда имеем

$$\left|c_k^j\right| \le \left[\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e\left[2e(1+\rho)\right]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}\right]\frac{1}{\rho^k}, j=1,2., k=1,2,. \qquad (10)$$

$$\left|d_k^j\right| \le \left[\varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e\left[2e(1+\rho)\right]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}\right]\frac{1}{\rho^k}, j=1,2., k=1,2,. \qquad (11)$$

Из формулы

$$u(r,\varphi)=c_0^1+\left[c_1^1\sin(\varphi_2-\varphi_1)+c_1^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]\frac{r}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[c_k^1-\frac{1}{4(k-1)}d_{k-2}^1\right]\sin k(\varphi_2-\varphi)+\left[c_k^2-\frac{1}{4(k-1)}d_{k-2}^2\right]\sin(\varphi-\varphi_1)\right\}\frac{r^k}{\sin k(\varphi_2-\varphi_1)}+$$

$$+\frac{r^k}{4}d_0^1+\frac{r^2}{8}\left[d_1^1\sin(\varphi_2-\varphi)+d_1^2\sin(\varphi-\varphi_1)\right]\frac{r}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}+$$

$$+\frac{r^2}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+1)}d_k^1\sin k(\varphi_2-\varphi)+\frac{d_k^2}{k+1}\sin k(\varphi-\varphi_1)\right]\frac{r^k}{\sin k(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Используя неравенств (10) и (11) и условию $\left|\sin k(\varphi_2 - \varphi_1)\right| \geq \dfrac{\theta}{m^{\sigma}}$,

Получим оценку в круге $G(\rho)$

$$\left|u(r,\varphi)\right| \leq \left[1 + \frac{2e\left[2e(1+\rho)\right]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}\right]\left[\varepsilon_1(1+S_1) + \varepsilon_2(S_2+S_3)\right],$$

$$S = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k, S_1 = \frac{2}{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}k^{\sigma}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k, S_2 = \frac{r^2}{4}\left(\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\sigma}}{k+1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k + 1\right), S_3 = \frac{r^2}{2\theta}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{\sigma}}{k+1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{-2k}\right)$$

$$M_4 = M_1 + \rho^2 M_3.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1 . Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики .-М.: Наука , 1977 г.

2 . Натансон И . М . Конструктивная теория функций.,-Л.,ГИТЛ ,1949 г.

3 . Soliyev E.A.,Azimov K.,UzakovM.M.” Laplas tenglamasi uchun ichki masalada turg’unlikni baholash”.UrgenchDU , 2012 yil , 2012 yil 9-10 noyabr,respublika ilmiy konferensiyasi maqolalar to’plami.Tezis,213-214 бет.

4. Azimov Kaxramon **.** " Stability estimation of a solution in one international problem for the Laplace equation “.E-ISSN NO:-2349-0721 Impact factor : 6.549 . www.ijerd.com 2, International Engineering Journal For Research & Development , Vol.5 Issue 5 pp 1-4.