



ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ТОЧЕК ДВУХ РАДИУСОВ КРУГА.

К.Азимов

- Старший преподаватель кафедры "Высшая математика"
Джизакский политехнический институт, Узбекистан

Аннотация: В данной статье оценивается устойчивость для продолжения бигармонической функции из конечного числа точек двух радиусов круга.

Ключевые слова: Абсолютно интегрируемая функция, гармонические и бигармонические функции, устойчивость решения, аналитические продолжения

BIGARMONIK FUNKSIYANI DOIRA IKKI RADIUSINING CHEKLI NUQTASIDAN DAVOM ETTIRISH UCHUN TURG'UNLIGINI BAHOLASH

Azimov Q

- Jizzakh politexnika instituti "Oliy matematika" kafedrasida
katta o'qituvchisi, Uzbekistan

Annotyatsiya: Ushbu maqolada bigarmonik funksiyani doira ikki radiusining chekli nuqtalaridan davom ettirish turg'unligi baholanadi.

Kalit so'zlar: absolyut integrallanuvchi funksiya, garmonik va bigarmonik funksiyalar, yechimning turg'unligi, analitik davom ettirish

ESTIMATION OF STABILITY FOR CONTINUING A BIHARMONIC FUNCTION FROM A FINITE NUMBER OF POINTS OF TWO RADIUS OF A CIRCLE.

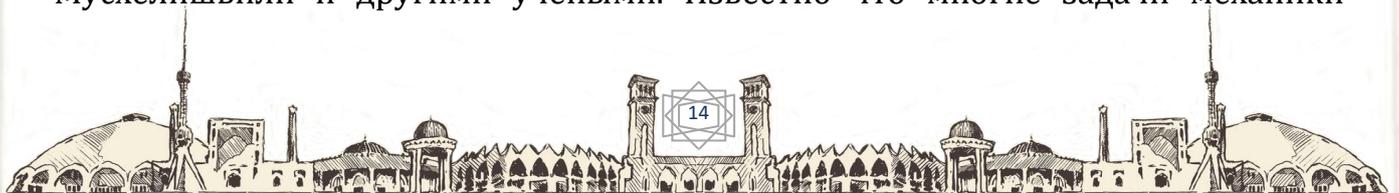
K.Azimov

- Senior lecturer of department higher mathematics
Jizzakh politechnical institute, Uzbekistan

Annotation: This paper evaluates the stability of the continuation of the harmonic function from the finite points of the two radii of the circle.

Keywords; Абсолютно интегрируемая функция, гармонические и бигармонические функции, устойчивость решения, аналитические продолжения

Классы гармонических и бигармонических функций в разное время были изучались выдающимся математиками как Г.В. Колосов, Ф.Д. Гахов, И. И. Мухелишвили и другими учёными. Известно что многие задачи механики





сплошных сред приводят к гармонической и бигармонической проблеме. В работе [1] приводится замечательное представление бигармонической функции через гармонической функции.

Постановка задачи:

$$\Delta^2 u = 0, (r, \varphi) \in D(R) \quad (1)$$

$$|u(r_k, \varphi_j)| \leq \varepsilon_1 \quad (2)$$

$$|\Delta u(r_k, \varphi_j)| \leq \varepsilon_2 \quad (3)$$

где $r_k \in (0,1], k = 1,2,3,\dots,m, \varphi_j = [0,2\pi], \varepsilon_j$ – заданные числа, $j=1,2$.

Решение задачи **(1)-(3)** рассмотрим в множестве функций удовлетворяющих условий:

$$|u(r, \varphi)| \leq M_1, (r, \varphi) \in \overline{D(R)}, \varphi_j = [0,2\pi] \quad (4)$$

$$|\Delta u(r, \varphi)| \leq M_2, (r, \varphi) \in \overline{D(R)}, \varphi_j = [0,2\pi] \quad (5)$$

ТЕОРЕМА. Пусть выполняется следующие условия:

1. числа $\varepsilon_j - j=1,2$ и натуральные числа m связаны соотношениями

$$\varepsilon_1 = 2M_4 \frac{R}{R-\rho} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m + M_2 S \quad (6)$$

$$\varepsilon_2 = 4M_2 \frac{R}{R-\rho} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m, 1 \leq \rho \leq R, R \geq 4e \quad (7)$$

2. $\varphi_j, j = 1,2$ такие, что $|\sin m(\varphi_2 - \varphi_1)| \leq \frac{\theta}{m^\sigma}, 0 < \theta < 1, 1 < \sigma < \infty$.

3. числа $r_k = \frac{k}{m}, k \in \overline{1,m}$, равностоящие узлы на $(0,1]$.

Тогда для решения задачи **(1)-(3)** в круге $D(\rho), \rho \in \left[1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2R}{e}}\right]$ имеет

место оценка $|u(r, \varphi)| \leq \left(1 + \frac{2e[2e(\rho+1)]^{m-1}}{\sqrt{2\pi m}}\right) (\varepsilon_1(1+S_1) + S_2(S_2+S_3)).$

Доказательство. Решение уравнения (1) представляется формулой [1]

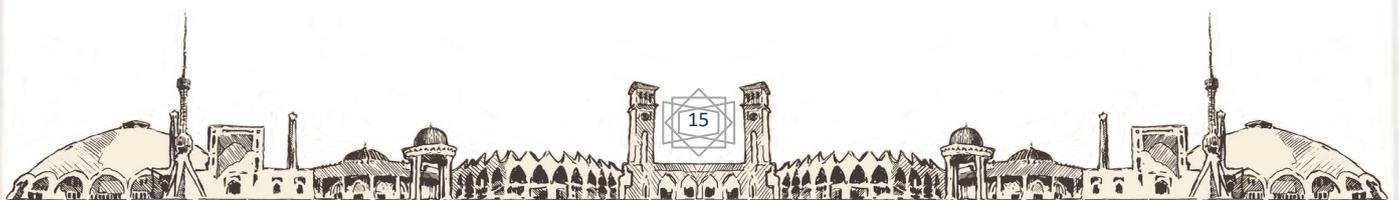
$u(r, \varphi) = r^2 u_1(r, \varphi) + u_2(r, \varphi)$ для неё

$$\Delta u(r, \varphi) = 4u_1(r, \varphi) + 4r \frac{\partial u_1(r, \varphi)}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} (4+4k)(a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

поэтому при $r = R$ имеем $\Delta u(R, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (4+4k)(a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi).$

где $a_0^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(R, \varphi) d\varphi, a_k^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(R, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, b_k^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_1(R, \varphi) \sin k\varphi d\varphi, k = 1,2,3,\dots$

Пусть $\Delta u(R, \varphi)$ -абсолютно интегрируемая функция в $[-\pi, \pi]$ Тогда





$$a_0^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta u_1(R, \varphi) d\varphi, a_k^2 = \frac{1}{4(k+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta u_1(R, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, b_k^1 = \frac{1}{4(k+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta u_1(R, \varphi) \sin k\varphi d\varphi, k = 1, 2, 3, \dots$$

Используя условия (5) получим

$$|a_0^2| \leq \frac{M_2}{4}, |a_k^2| \leq \frac{M_2}{2+2k}, |b_k^1| \leq \frac{M_2}{2+2k}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом из

$$u_1(r, \varphi) = \frac{a_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 \cos k\varphi + b_k^1 \sin k\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

Получим $|u_1(r, \varphi)| \leq \frac{M_2}{8} + \frac{M_2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^k$

Оценим $u_1(r, \varphi)$ в круге радиуса ρ .

$$|u_1(r, \varphi)| \leq \frac{M_2}{8} + \frac{M_2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^k = M_3, (r, \varphi) \in G(\rho).$$

Тогда из

$$|u_2(r, \varphi) - r^2 u_1(r, \varphi)| \leq |u_2(r, \varphi)| + r^2 |u_1(r, \varphi)| \leq M_1,$$

Следует, что $|u_2(r, \varphi)| \leq M_1 + \rho^2 M_3 = M_4, (r, \varphi) \in G(\rho)$.

Функция $u_j(r, \varphi)$ представляется в видах

$$u_j(r, \varphi) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^j \cos k\varphi + b_k^j \sin k\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^k, j = 1, 2.$$

Аналитическая продолжения функций $u(r, \varphi_j)$ и $\Delta u(r, \varphi_j)$ из $(0, R]$ в область

$G(R) = \{z : |z| < R\}$ представляется в видах $f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j z^k, v_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^j z^k$ где

Оценим коэффициентов $c_k^j = \frac{f_j^{(k)}(0)}{k!}, d_k^j = \frac{v_j^{(k)}(0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2.$ c_k^j и d_k^j

$$|c_0^j| \leq \frac{M_2}{4}, |c_1^j| \leq \frac{1}{R} (|a_1^2| + |b_1^2|) \leq \frac{2M_4}{R}, j = 1, 2.$$

$$|d_k^j| \leq \left\{ |a_k^1| + |b_k^1| \right\} \frac{4(k+1)}{R^k} \leq \frac{4(k+1)}{R^k} \left\{ \frac{2M_2}{2(k+1)} \right\} = \frac{4M_2}{R^k},$$

$$|c_k^j| \leq \left\{ |a_k^1| + |b_k^1| + |a_{k-2}^1| + |b_{k-2}^1| \right\} \frac{1}{R^k} \leq \frac{2}{R^k} \left\{ M_4 + \frac{M_2}{k-1} \right\}, j = 1, 2, k = 1, 2, \dots$$

В круге $\overline{G(\rho)}$ оценим функций $f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j z^k, v_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^j z^k$, для этого

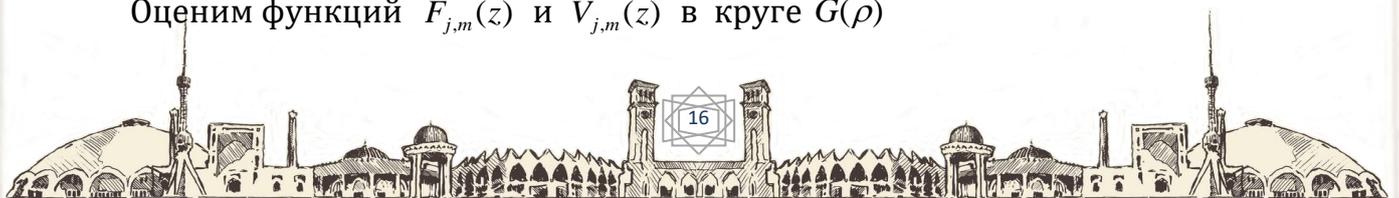
$$f_j(z) = f_{j,m-1}(z) + F_{j,m}(z) \text{ и } v_j(z) = v_{j,m-1}(z) + V_{j,m}(z)$$

представим в виде

где

$$f_{j,m-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^j z^k, F_{j,m}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k^j z^k \text{ и } v_{j,m-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k^j z^k, V_{j,m}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} d_k^j z^k, j = 1, 2, \dots$$

Оценим функций $F_{j,m}(z)$ и $V_{j,m}(z)$ в круге $G(\rho)$





$$|F_{j,m}(z)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |c_k^j| |z|^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{2}{R^k} \left\{ M_4 + \frac{M_2}{2(k-1)} \right\} \rho^k = 2 \sum_{k=m}^{\infty} \left\{ M_4 + \frac{M_2}{2(k-1)} \right\} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \leq$$

$$2M_4 \frac{R}{R-\rho} \left(\frac{\rho}{R} \right)^m + M_2 S = \varepsilon_1.$$

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j z^k, v_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^j z^k$$

$$|V_{j,m}(z)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |d_k^j| |z|^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} 4M_2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^m = 4M_2 \left(\frac{R}{R-\rho} \right) \left(\frac{\rho}{R} \right)^m = \varepsilon_2.$$

Для оценки полиномов $f_{j,m-1}(z), v_{j,m-1}(z)$ Пользуемся интерполяционными формулами Лагранжа

$$f_{j,m-1}(z) = \sum_{k=1}^{m-1} f_{j,m-1}(r_k) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq k_n}}^{m-1} \frac{z - z_q}{z_k - z_q} \quad \text{и} \quad v_{j,m-1}(z) = \sum_{k=1}^{m-1} v_{j,m-1}(r_k) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq k_n}}^{m-1} \frac{z - z_q}{z_k - z_q}.$$

Из результатов предыдущих задач [3] следует что справедливы оценки в круге $G(\rho)$.

$$|f_{j,m-1}(z)| \leq \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \quad \text{и} \quad |v_{j,m-1}(z)| \leq \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}$$

Таким образом, для функций $f_j(z), v_j(z)$ в круге $G(\rho)$ имеем оценки

$$|f_j(z)| \leq \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \quad \text{и} \quad |v_j(z)| \leq \varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}}$$

Из этих оценок по неравенству Коши имеем

$$|f_j^{(k)}(0)| \leq \varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \left(\frac{k!}{\rho^k} \right) \quad \text{и} \quad |v_j^{(k)}(0)| \leq \varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \left(\frac{k!}{\rho^k} \right)$$

Отсюда имеем

$$|c_k^j| \leq \left[\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \right] \frac{1}{\rho^k}, j=1,2., k=1,2., \quad (10)$$

$$|d_k^j| \leq \left[\varepsilon_2 + \frac{2\varepsilon_2 e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \right] \frac{1}{\rho^k}, j=1,2., k=1,2., \quad (11)$$

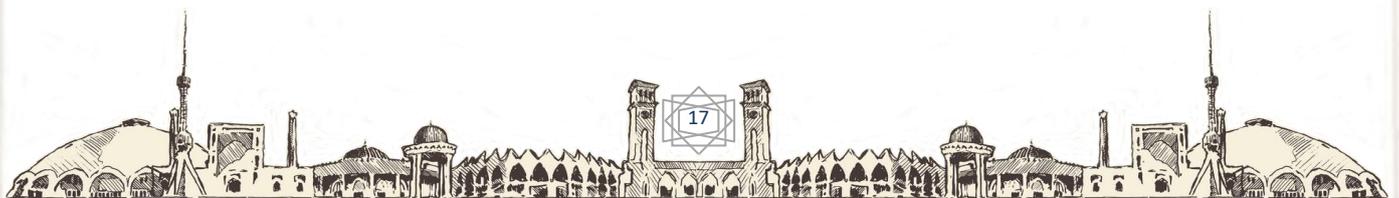
Из формулы

$$u(r, \varphi) = c_0^1 + \left[c_1^1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + c_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \frac{r}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \left[c_k^1 - \frac{1}{4(k-1)} d_{k-2}^1 \right] \sin k(\varphi_2 - \varphi) + \left[c_k^2 - \frac{1}{4(k-1)} d_{k-2}^2 \right] \sin(\varphi - \varphi_1) \right\} \frac{r^k}{\sin k(\varphi_2 - \varphi_1)} +$$

$$+ \frac{r^k}{4} d_0^1 + \frac{r^2}{8} \left[d_1^1 \sin(\varphi_2 - \varphi) + d_1^2 \sin(\varphi - \varphi_1) \right] \frac{r}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} +$$

$$+ \frac{r^2}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+1)} d_k^1 \sin k(\varphi_2 - \varphi) + \frac{d_k^2}{k+1} \sin k(\varphi - \varphi_1) \right] \frac{r^k}{\sin k(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$





Используя неравенств (10) и (11) и условию $|\sin k(\varphi_2 - \varphi_1)| \geq \frac{\theta}{m^\sigma}$,

Получим оценку в круге $G(\rho)$

$$|u(r, \varphi)| \leq \left[1 + \frac{2e[2e(1+\rho)]^{m-1}}{\sqrt{2m\pi}} \right] [\varepsilon_1(1+S_1) + \varepsilon_2(S_2 + S_3)],$$

$$S = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k-1} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k, S_1 = \frac{2}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} k^\sigma \left(\frac{r}{\rho} \right)^k, S_2 = \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\sigma}{k+1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^k + 1 \right), S_3 = \frac{r^2}{2\theta} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^\sigma}{k+1} \left(\frac{r}{\rho} \right)^{-2k} \right)$$

$$M_4 = M_1 + \rho^2 M_3.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

- 1 . Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики .-М.: Наука , 1977 г.
- 2 . Натансон И . М . Конструктивная теория функций.,-Л.,ГИТЛ,1949 г.
- 3 . Soliyev E.A.,Azimov K.,Uzakov M.M." Laplas tenglamasi uchun ichki masalada turg'unlikni baholash".UrgenchDU , 2012 yil , 2012 yil 9-10 noyabr, respublika ilmiy konferensiyasi maqolalar to'plami.Tezis,213-214 bet.
4. Azimov Kaxramon . " Stability estimation of a solution in one international problem for the Laplace equation ".E-ISSN NO:-2349-0721 Impact factor : 6.549 . www.ijerd.com 2, International Engineering Journal For Research & Development , Vol.5 Issue 5 pp 1-4.