КАСР ТАРТИБЛИ $D_{ax}^{\alpha}y(x)-\lambda y(x)=f(x)$ ЧИЗИҚЛИ МОДЕЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН КОШИ ТИПИДАГИ МАСАЛАНИНГ ЕЧИЛИШИ ҲАҚИДА

Д.Д.Орипов
ФарДУ, таянч докторант

Аннотация: Мақолада каср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун бошланғич шартли масала қўйилган ва бу масаланинг ечими ошкор кўринишда топилган.

Калит сўз ва иборалар: каср тартибли ҳосила, каср тартибли оддий дифференциал тенглама, бошланғич шартли масала, Миттаг-Леффлер функцияси.

Аннотация: Поставлена начальная задача для одного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, решения поставленной задачи найдены в явном виде.

Ключевые слова и выражения: производная дробного порядка, обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, начальная условная задача, функция Миттага-Леффлера.

Annotation: The initial problem for one ordinary differential equation of fractional order is posed, the solutions of the problem posed are found in explicit form.

Key words and word expressions: fractional derivative, fractional order ordinary differential equation, initial conditional task, Mittag-Leffler’s function.

Агар тенгламада бир ўзгарувчили номаълум функциянинг каср тартибли ҳосиласи қатнашса, бундай тенглама каср тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам Коши типидаги масалаларни ўрганиш мумкин[1]

Қуйидаги

$$D_{ax}^{\alpha}y(x)-\lambda y(x)=f(x)\ \ (a<x\le b;\ \alpha>0;\ \lambda\in R) \qquad (1)$$

тенглама *каср тартибли чизиқли модел дифференциал тенглама* дейилади.

Коши типидаги масала. (1) тенгламанинг

$$\left[D_{ax}^{\alpha-k}y(x)\right]_{x=a}=q_k,\ q_k\in R\ \left(k=1,2,\ldots,n,\ n=[\alpha]+1\right) \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]\ \left(n=[\alpha]+1\right)$ фазода аниқланган ечимини топинг, бу ерда

$$C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]=\left\{y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]:D_{ax}^{\alpha}y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]\right\}.$$

(1)-(2) масалани ўрганишда бу масаланинг 2-тур Волтерра интеграл тенгламасига келтириш асос қилиб олинади:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (3)$$

(1)-(2) Коши типидаги масала (3) кўринишдаги 2-тур Волтерра интеграл тенгламасига $C_\gamma[a,b]$ $(0\le\gamma<1)$:

$$C_\gamma[a,b]=\left\{y(x):(x-a)^\gamma y(x)\in C[a,b]\right\} \quad (4)$$

фазода тенг кучли.

(1) - (2) Коши типидаги масала ва (3) кўринишдаги 2-тур Волтерра интеграл тенгламаларининг тенг кучлилигини тасдиқловчи хулосаларни келтирамиз.

1-теорема. (1)-(2) масала (3) интеграл тенгламага тенг кучли бўлиши учун $\alpha>0,\ n=[\alpha]+1$ ва $f(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]$ бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурийлигини исботлаш учун (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$D_{ax}^{\alpha}y(x)=\lambda y(x)+f(x).$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг ҳар икки томонига $D_{ax}^{-\alpha}$ тескари операторни қўллаймиз:

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}y(x)=D_{ax}^{-\alpha}\left(\lambda y(x)+f(x)\right).$$

У ҳолда

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}\varphi(x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a) \quad (5)$$

ва

$$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt,\quad \alpha>0 \quad (6)$$

формулаларга асосан [2]

$$y(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left[D_{ax}^{\alpha-j-1}y(x)\right]_{x=a}}{\Gamma(\alpha-j)}(x-a)^{\alpha-j-1}=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликда j ни $j-1$ билан алмаштириб,

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[D_{ax}^{\alpha-j}y(x)\right]_{x=a}}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламадан (2) бошланғич шартларни эътиборга олсак, (3) интеграл тенглама ҳосил бўлади.

Етарлилиги каср тартибли интегродифференциал операторларнинг хоссаларидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

Бу масаланинг ечимини $f(x)\in C_{\gamma}[a,b]$ $(0\le\gamma<1)$ бўлганда ошкор равишда топамиз.

Биз (3) интеграл тенгламани ечиш учун кетма-кет яқинлашиш усулини қўллаймиз. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}, \qquad (7)$$

$$y_m(x)=y_0(x)+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\quad(m\in N). \qquad (8)$$

Агар (5) ва (7) ларни эътиборга олсак, $y_1(x)$ учун қуйидаги

$$y_1(x)=y_0(x)+\lambda D_{ax}^{-\alpha}y_0(x)+D_{ax}^{-\alpha}f(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}D_{ax}^{-\alpha}(t-a)^{\alpha-j}+D_{ax}^{-\alpha}f(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(2\alpha-j+1)}(x-a)^{2\alpha-j}+D_{ax}^{-\alpha}f(x)$$

ифодани топамиз ва натижада

$$y_1(x)=\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \qquad (9)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шунга ўхшаш (7) ва (9) ларни қўллаб:

$$y_2(x)=y_0(x)+\lambda D_{ax}^{-\alpha}y_1(x)+D_{ax}^{-\alpha}f(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\lambda\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i-j+1)}D_{ax}^{-\alpha}(t-a)^{\alpha i-j}+$$

$$+D_{ax}^{-\alpha}f(x)+D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{-\alpha}f(x)$$

ни ҳосил қиламиз. (5) ва (6) формулаларга асосан

$$y_2(x)=\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{3}\frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)}+\int_a^x\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)}(x-t)^{\alpha i-1}\right]f(t)dt \qquad (10)$$

ифодани оламиз.

Бу жараённи давом эттириб, $y_m(x)$ учун қуйидаги формулани оламиз:

$$y_m(x)=\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{m+1}\frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)}+\int_a^x\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)}(x-t)^{\alpha i-1}\right]f(t)dt. \qquad (11)$$

Бу тенгликда $m\to\infty$ да лимитга ўтиб, (3) 2-тур Волтерра интеграл тенгламасининг ечимини ошкор кўринишда оламиз:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)}+\int_a^x \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)}(x-t)^{\alpha i-1}\right] f(t)dt,$$

ёки i индексни $i-1$ билан алмаштириб,

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}(x-a)^{\alpha i+\alpha-j}}{\Gamma(\alpha i+\alpha-j+1)}+\int_a^x \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}(x-t)^{\alpha i+\alpha-1}\right] f(t)dt. \quad (12)$$

Бу ечимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} q_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]+\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right] f(t)dt.$$

(13)

Бу ерда $E_{\alpha,\beta}(z)$- Миттаг-Лефллер функцияси бўлиб, $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{\Gamma(\alpha l+\beta)}$ кўринишда аниқланади.

Бу формула (3) Волтерра интеграл тенгламасининг ошкор кўринишдаги ечимини беради. Коши типидаги масала (3) Волтерра интеграл тенгламасига тенг кучли бўлганлиги учун бу масаланинг ҳам ечимини беради.

2-теорема. $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, $\gamma(0\le\gamma<1)$, $\gamma\ge n-\alpha$ ва $\lambda\in R$ бўлсин. Агар $f(x)\in C_{\gamma}[a,b]$ бўлса, у ҳолда Коши типидаги (1)-(2) масала ягона $y(x)\in C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ ечимга эга бўлади ва бу ечим (13) формула билан берилади.

Хусусан, агар $f(x)\equiv 0$ бўлса, у ҳолда (1) бир жинсли тенглама учун Коши типидаги масала $C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ фазода ягона $y(x)$ ечимга эга бўлади ва бу ечим қуйидаги

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} q_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right] \quad (14)$$

кўринишда бўлади.

Агар (1) тенгламада $\lambda=0$ бўлса, бу тенглама

$$D_{ax}^{\alpha}y(x)=f(x), \quad \alpha>0 \quad (15)$$

кўринишга келади. У ҳолда (1)-(2) Коши типидаги масала қуйидаги масалага келади:

1-масала. (15) тенгламанинг (2) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $C_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$ $(n=[\alpha]+1)$ фазода аниқланган ечимини топинг.

Хусусан, агар $0<\alpha<1$ бўлса, (15)–(2) масала қуйидаги кўринишга ўтади:

$$D_{ax}^{\alpha}y(x)=f(x), \quad \left[D_{ax}^{\alpha-1}y(x)\right]_{x=a}=q, \quad q\in R. \quad (16)$$

Коши типидаги (15) – (2) масалани ечиш учун тенгламанинг ҳар икки томонига $D_{ax}^{-\alpha}$ тескари операторни қўллаймиз:

У ҳолда

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} y(x) = D_{ax}^{-\alpha} f(x) \quad (17)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(17) тенгликнинг чап томонига (5) формулани қўлласак,

$$y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[D_{ax}^{\alpha-k-1} y(x)\right]_{x=a}}{\Gamma(\alpha-k)} (x-a)^{\alpha-k-1} = D_{ax}^{-\alpha} f(x) \quad (18)$$

тенглик келиб чиқади. (16) тенгликда k ни $k-1$ билан алмаштириш бажарсак,

$$y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left[D_{ax}^{\alpha-k} y(x)\right]_{x=a}}{\Gamma(\alpha-k+1)} (x-a)^{\alpha-k} = D_{ax}^{-\alpha} f(x) \quad (19)$$

тенглик ҳосил бўлади.

(19) тенгликдан (2) бошланғич шартларга кўра (15)-(2) масаланинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} (x-a)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (20)$$

Хусусан, (16) масаланинг ечими

$$y(x) = \frac{q}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

кўринишда бўлади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Килбас. А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. –Самара. Курс лекций, 2009. -121с.
2. А.Қ. Ўринов. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Тошкент: Мумтоз сўз, 2014.