ОБУЧЕНИЕ РАЗДЕЛА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ГЕОМЕТРИИ

Шодмон Турдиев
Кафедра высшей математики
Ташкентский финансовый институт
Республика Узбекистан

Аннотация: в статье рассмотрены обучение раздела топологических пространств в геометрии, виды топологических пространств и сделан анализ их обучения.

Ключевые слова: топология, математика, алгебра, геометрия, методы обучения, деформация.

Топология – одна из самых молодых ветвей геометрии. Топология является одним из самых абстрактных разделов современной математики. Примерно за сто лет её существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики.

Топология (от греческого «τοποξ» – место, окрестность, «λογοξ» – закон) – раздел математики, изучающий идеи непрерывности. В топологии впервые даются строгие определения таких фундаментальных понятий геометрии, как линия и поверхность. Предметом топологии являются свойства фигур, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, то есть взаимно однозначных и непрерывных в обе стороны отображениях. Топология, как наука возникла из потребностей связанных с математическим анализом. Эта наука, хотя и считается молодой, на самом деле известна уже давно, именно благодаря тесным связям с математическим анализом. Идеи топологии идут от работ таких крупных математиков 19 в. как Риммман, Пуанкаре, Кантор, Эйлер. Развитие топологии идёт бурными темпами и в большом числе направлений, этот процесс не окончен в настоящее время, хотя ряд крупных проблем, стоящих перед топологией, успешно решен. Топологические методы стали мощным инструментом математического исследования. Топологический подход позволяет упростить многие доказательства фундаментальных теорем классической математики и обобщить эти теоремы на более широкие классы пространств.

Геометрия школьного курса имеет дело в основном со свойствами фигур, связанными с понятиями длины, площади, объема-то есть метрическими свойствами фигур. Лишь очень немногие теоремы и задачи школьного курса геометрии рассматривают свойства иного характера. Топология как раз и является разделом геометрии, изучающим свойства фигур, которые могут быть установлены без измерения и сравнения величин, но при этом имеющие геометрический смысл.

Целью первой главы курсовой работы было рассмотреть основные элементы общей топологии.

Задачи:

- дать определение топологического пространства;
- рассмотреть свойства топологических пространств;
- охарактеризовать топологические преобразования.

Во второй главе работы мы попытались рассмотреть топологические свойства поверхностей. Были поставлены следующие задачи:

- дать определение двумерного многообразия;
- рассмотреть эйлерову характеристику поверхности;
- охарактеризовать ориентируемые и неориентируемые поверхности.

Понятие метрического пространства

Определение 1. Декартово произведение множеств A и B определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, то есть

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

В частности, возможно A = B.

Определение 2. Говорят, что в множестве X задана метрика ρ, если определено отображение

$\rho: X \times X \to R$,

удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $\forall\, x, y \in X\ \{\rho(x, y) \geq 0\}$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall\, x, y \in X\ \{\rho(x, y) = \rho(y, x)\}$.
3. $\forall\, x, y, z \in X\ \{\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)\}$.

Условия 1, 2, 3 называются аксиомами метрики, при этом условие 2 называется аксиомой симметрии, а 3 – аксиомой треугольника.

Определение 3. Множество X с заданной на нем метрикой ρ называется метрическим пространством и обозначается (X, ρ).

В тех случаях, когда ясно, о какой метрике идет речь, метрическое пространство (X,ρ) обозначают просто X.

Число ρ(x, y) называют расстоянием между точками x и y в пространстве X.

Примеры метрических пространств

Пример 1. Определим для элементов произвольного непустого множества X расстояние следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ 1, & \text{если} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Очевидно, аксиомы 1 – 3 выполняются, а, следовательно, (X, ρ) – метрическое пространство.

Пример 2. Множество действительных чисел R с расстоянием

$\rho(x, y) = (y - x)^2$ не является метрическим пространством.

Действительно не выполняется третья аксиома. Например, для трех точек 2, 3 и 4 получим:

$\rho(2, 3) = (3 - 2)^2 = 1$, $\rho(3, 4) = (4 - 3)^2 = 1$,

$\rho(2, 4) = (4 - 2)^2 = 4$ и $\rho(2, 3) + \rho(3, 4) < \rho(2, 4)$.

Определение 1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x_0 \in X$,

$r > 0$ – действительное число. Назовём открытым шаром с центром в точке x_0 и радиусом r множество

$U(x_0, r) = \{x \mid x \in X, \rho(x, x_0) < r\}$.

Определение 2. Подмножество $G \subset X$ будем называть открытым в

(X, ρ), если любая его точка является центром некоторого открытого шара, содержащегося в G.

Пустое множество $\varnothing$ также считаем открытым множеством.

Определение 3. Окрестностью точки A метрического пространства будем называть любое открытое множество, содержащее эту точку.

Обозначим совокупность всех открытых множеств в (X, ρ) просто Φ_ρ.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. 1) Объединение любой совокупности $\{G_\alpha\}$ множеств из Φ_ρ принадлежит Φ_ρ.

$\bigcup_{\alpha} G\alpha \in \Phi_\rho$.

2) Пересечение любых двух множеств G_1 и G_2 из Φ_ρ принадлежит Φ_ρ.

$G_1 \cap G_2 \in \Phi_\rho$.

3) Метрическое пространство X – открытое множество, то есть

$X \in \Phi_\rho$, $\varnothing \in \Phi_\rho$.

Доказательство. 1) Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \Phi_\rho$. Обозначим

$G = \bigcup_{\alpha} G_\alpha$.

Возьмём произвольную точку $x_0 \in G$. Тогда существует такое α_0, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$, и так как $G_{\alpha_0} \in \Phi_\rho$, то найдётся число r_0, что

$U(x_0, r_0) \subset G_\alpha$.

Так как $G\alpha_0 \subset G$, то $U(x_0, r_0) \subset G$.

Итак, G – открытое множество.

2) Пусть $G = G_1 \cap G_2$, где $G_1, G_2 \in \Phi_\rho$ и $G \neq \varnothing$.

Если $x_0 \in G$, то $x_0 \in G_1$ и $x_0 \in G_2$.

Тогда существуют такие радиусы r_1 и r_2, что

$U(x_0, r_1) \subset G_1$, $U(x_0, r_2) \subset G_2$.

Обозначим $r = \min\{r_1, r_2\}$, тогда

$U(x_0, r) \subset G_1 \cap G_2 = G$.

Итак, G – открытое множество.

3. Так как всегда можно представить

$$X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha},$$

где U_{α} – открытый шар радиуса r, с центром в точке α, объединение рассматривается по всем точкам пространства, то в силу 1 получим, что пространство X – открыто. Пустое множество мы предполагаем всегда открытым.

В дальнейшем описанное нами семейство Φ_{ρ} всех открытых множеств в метрическом пространстве (X, ρ) будем называть топологией, индуцированной метрикой ρ в X..

Определение и примеры топологических пространств

Многие понятия теории метрических пространств (предел, предельная точка, точка прикосновения, замыкание множества, граница множества, непрерывность и т.д.) вводятся, опираясь на понятие окрестности или, что тоже самое, на понятие открытого множества. Понятие окрестность и открытое множество определяются с помощью метрики.

Свойства открытых множеств метрического пространства принимаются в качестве аксиом. Этот путь приводит нас к топологическим пространствам, по отношению к которым метрические пространства представляют собой частный случай.

Определение 1. Пусть X – непустое множество элементов произвольной природы, Φ = $\{G_{\alpha}\}$ – семейство подмножеств множества X, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. Само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат семейству Φ.
2. Объединение любого семейства множеств из Φ также принадлежит Φ.
3. Пересечение любых двух множеств из Φ также принадлежит Φ.

Тогда семейство Φ называется топологией или топологической структурой.

Пара (X, Φ) или, другим словами, множество X, в котором задана некоторая топология, называется топологическим пространством.

Элементы множества X называются точками топологического пространства, элементы семейства Φ называются открытыми множествами в (X, Φ).

Когда не может возникнуть недоразумений, разрешается просто писать: X – топологическое пространство, $G\alpha$ – открытое множество, то есть не указывать постоянно связь с топологией Φ.

Примеры топологических пространств.

Пример 1. X – произвольное множество. Из аксиомы 1 топологического пространства вытекает, что среди открытых множеств любой топологической структуры в X обязательно должны быть пустое множество $\varnothing$ и само множество X. Очевидно, что для семейства

$\Phi_{т} = \{\varnothing, X\}$,

которое состоит лишь из этих двух множеств, выполняются также и аксиомы 2 и 3.

Поэтому $Ф_т = \{\varnothing, X\}$ является простейшей топологической структурой в X. Эта топология называется тривиальной, а пара (X, Ф) тривиальным топологическим пространством. Иногда эту пару называют антидискретным топологическим пространством.

Пример 2. Другой крайностью является так называемое дискретное топологическое пространство $(X, Ф_d)$, где $Ф_d$ представляет собой семейство всех подмножеств множества X. Очевидно, что и в этом случае все аксиомы 1 – 3 выполняются.

Пример 3. Пусть $X = R^3$. Открытыми в X множествами назовем только открытые шары U(r) с общим центром O и радиусом r, а также всё множество X и пустое множество.

Очевидно, аксиома 1 выполняется.

Пусть $\{U(r_\alpha)\}$ – любая система открытых множеств. Тогда их объединением будет шар с центром O и радиусом $r = \sup_\alpha\{r_\alpha\}$.

Если $\sup_\alpha\{r_\alpha\} = \infty$, то $U(r) = X$.

Следовательно, аксиома 2 выполняется.

Пересечением двух множеств $U(r_1)$ и $U(r_2)$ будет множество U(r), где $r = \min\{r_1, r_2\}$, то есть аксиома 3 также выполняется.

Выделенное нами семейство открытых множеств является топологией в R^3, которую иногда называют концентрической.

Определение 2. Пусть в множестве X введены две топологии $Ф_1$ и $Ф_2$. Говорят, что $Ф_1$ сильнее $Ф_2$ (или $Ф_2$ слабее $Ф_1$), если $Ф_2 \subset Ф_1$, то есть любое множество из $Ф_2$ принадлежит $Ф_1$.

Очевидно, самой сильной топологией является дискретная топология, а самой слабой – тривиальная.

А вообще – две топологии на одном и том же множестве могут быть несравнимыми.

Пример.

$X = \{a, b\}$,

$Ф_1 = \{\varnothing, X, a\}$,

$Ф_2 = \{\varnothing, X, b\}$.

Топологии $Ф_1$ и $Ф_2$ несравнимы.

Выводы

Ответить на вопрос о том, что такое топология, весьма непросто. Известный французский математик Андре Вейль сказал, что за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры, выразив этим, во-первых, необычное изящество и красоту топологии и, во-вторых, то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. А за последнее время топология все более проникает в физику, химию, биологию. Однако проникновение в волшебный мир топологи затруднительно. Подобно тому, как строительные леса, окружающие недостроенное здание, мешают охватить взглядом красоту архитектурного замысла, так многочисленные и утомительные детали построения, заполняющие книги по топологии, затрудняют охватить мысленным взором красивое здание этой математической науки. Даже многие специалисты – математики нередко отступают перед трудностями на пути овладения топологией. Для того чтобы в полной мере оценить задачи, которые решаются этой научной дисциплиной, необходимо серьезное изучение многих весьма сложных вопросов математики.

В ходе данной работы были рассмотрены основные элементы общей топологии.

REFERENCES:

1. Sayliyeva, M. M. Q. (2021). Boshlang ‘ich ta’limda innovatsion texnologiyalardan foydalanish usullari. *Academic research in educational sciences*, *2*(CSPI conference 1), 770-772.
2. Sayliyeva, M. M. (2019). Ma'ruza mashg'ulotlarida talabalar faolligini oshirish texnologiyalari. Actual Problems of modern pedagogical sciences, 1(1), 197-198.
3. Sayliyeva, M. M. (2023). Bo’lajak boshlang’ich sinf o’qituvchilarini milliy g’oyaning insonparvarlik tamoyili bo’yicha tarbiyalash tendensiyasi. Современные тенденции начального образования, 1(1), 191-192.
4. Сайлиева, М (2019). Маданият ва саньат сохаларини жамиятимизда тутган ўрни. Fan tarraqiyotining rivojlanish istiqbollari, 1(1), 187-188.
5. Nizomov, R. A. (2020). Selection of promising varieties of okra (hibiscus esculentus l.) from non-conventional vegetable crops. *ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ*, 1(1), 99-103.
6. Ahrolovich, R. N., Urinbaevana, M. H., & Madiyarovich, S. S. (2020). Melon and its environmental characteristics. *Journal of Critical Reviews*, *7*(2), 480-490.
7. Akhrolovich, N. R. (2022). Influence of mineral fertilizers of different norms on the yield and product quality of white cabbage varieties. *European Journal of Interdisciplinary Research and Development*, *10*, 500-507.
8. Nizomov, R.; Makhamadaminov, Sh. (2022). Development of a method for producing a quality seed product by leaving the onion in place in the Tashkent region

of Uzbekistan. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(12), 2108–2119.

9. Abdujabbarova, F. A. (2020). The methods of studying and analyzing classical poetic arts in literature lessons. Journal of Critical Reviews, 7(5), 1637-1641.

10. Abdujabbarova, F. A. (2020). Teaching Uzbek Language and Literature Based on Interactive Technologies. International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 20(2), 2555-2558.

11. Abdujabbarova, F. A. (2020). Historical and cultural background od typological study Russian and Uzbek literature. Journal of Critical Reviews, 7(5), 2555-2558.

12. Abdujabbarova, F. A. (2020). Shavkat Rahmonning “Sulaymon tog‘I etegida o‘laganlarim” she ‘rini o‘rganish usullari. Filologok ta’limni takomillashtirish, 1(1), 55-58.

13. Inomjonovna, I. D. (2023, April). Boshlang’ich sinflarda individual ishlash texnologiyasi va uning samaradorligi. In *Proceedings of Scientific Conference on Multidisciplinary Studies* (Vol. 2, No. 4, pp. 207-212).

14. Ибрагимова, Д. И. (2022). Замонавий мактабларда адабиёт фанини ўқитиш муаммолари. Буюк ипак йўлида умуминсоний ва миллий қадриятлар, 1(2), 333-335.

15. Ибрагимова, Д. И. (2021). АЛИШЕР НАВОИЙНИНГ ТАРИХИ АНБИЁ ВА ҲУКАМО АСАРИДА ПАЙҒАМБАРЛАР ГЕНЕЗИСИ ТАҲЛИЛИ. Conference, 1(2), 63-65.

16. Ibragimova, D. (2021). “ҚИСАСИ РАБҒУЗИЙ” АСАРИДА ПРОФЕТОЛОГИК ИЛДИЗЛАРНИ ЎРГАНИШ. *Scienceweb academic papers collection*.

17. Khasanovich, A. N. (2021, November). PEDAGOGICAL EDUCATION IN THE TEACHING OF MOTHER TONGUE AND LITERARY SCIENCES IN SECONDARY SCHOOLS THE IMPORTANCE OF CLUSTER. In *Archive of Conferences* (pp. 11-13).

18. Нарманов, А. (2021). SCIENTIFIC AND THEORETICAL BASIS OF WESTERN AND EASTERN SPEECHES IN FORMATION OF CHILDREN'S SPEECH. *Экономика и социум*, (4-2), 1165-1170.

19. Narmanov, A. K. (2021). TECHNOLOGICAL FUNDAMENTALS OF EDUCATIONAL CLUSTERS. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *1*(10), 279-284.

20. Narmanov, A. K. (2021). SCIENTIFIC-THEORETICAL BASIS OF WESTERN AND EASTERN SPEECH IN THE DEVELOPMENT OF CHILDREN'S SPEECH. *Academic research in educational sciences*, *2*(12), 9-15.

21. Халилова, Н. И. (2019). Проблема рефлексии в самореализации и нравственном воспитании личности (на примере анализа рассуждений восточных мыслителей). *ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНЫХ РЕДАКТОРОВ*, 60.

22. Халилова, Н. И. (2018). Рефлексив технологияларни таълим жараёнига татбиқ этишнинг психологик жиҳатлари. *Современное образование (Узбекистан)*, (7), 17-21.

23. Халилова, Н. (2018). Особенности формирования рефлексии в подростковом возрасте. *Навчання і виховання обдарованої дитини: теорія та практика*, (2), 111-120.

24. Сейитниязов, КМ. Некоторые вопросы о стандартизации топонимов Каракалпакии. Международная конференция, 1(12), 4-9.

25. Сейтниязов, К. М. (2022). Топонимические методы исследования географических объектов. *География: природа и общество*, (2).

26. Seitniyazov, K. M. (2023). Some traditional names in Toponimics. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 11(4), 842-845.

27. Altibayeva, M., Karshibayeva, L., Madrahimova, Z (2022). Impact of surface water on the development of service networks of Syrdarya region. Electronic Journal of Actual Problems of Modern Science Education and Training, 1(12), 58-62.

28. Madraximova, Z., & Toymbayeva, D. (2022). Ekologiya o ‘qitish nazariyasi va metodikasining shakllanish manbalari. *Science and Innovation*, *1*(B8), 2409-2411.

29. Nigmatov, Askar, Madrakhimova, Zulfiya, Ishankulova, Komila (2020). Geotourism: Problems and Solutions on the Example of Uzbekistan. International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 21(1), 14-21.