BIR INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Yusubjonova Gulchiroy
Namangan davlat universiteti 2-kurs magistranti

Ma’lumki, butun tartibli differensial tenglamalarda koeffitsiyentlarning tenglama tartibiga qanday bog’liqligi ayon ravishda ko‘rinmaydi. Koeffitsiyentlar o`zgaruvchi bo‘lishi mumkin, ayrim hollarda esa o‘zgaruvchi koeffitsiyent qaralayotgan sohada singulyarlikka ega bo‘ladi. Differensial tenglamalardagi koeffitsiyentlarning fizik, mexanik va boshqa tabiiy jarayonlardagi turli faktorlarga bog‘liqligi ularning ahamiyatini oshiradi. Masalan, differensial tenglamadagi $U_t = a^2 U_{xx}$ o’zgarmas yoki o‘zgaruvchi *a* koeffitsiyent diffuziya jarayoni yuz berayotgan muhitga bog‘liq ravishda turlicha bo‘ladi.

Nazarimizda, differensial tenglamada ishtirok etadigan koeffitsientllarning tenglama tartibiga bog‘liq bo‘lgan holatlarni tadqiq etish ham dolzarblik kasb etadi. Tadqiqotlar kasr tartibli differensial tenglamalarda nisbatan osonroq, analitik ko‘rinishda bo‘lganligi sababli tadqiqot obyekti sifatida aynan kasr tartibli operatorlar qatnashgan differensial tenglamalar olinadi.

Quyidagi

$$ {}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}u(t,x) + \mu\, {}_{CF}D_{0t}^{\alpha}u(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) \quad (1) $$

integro-differensial tenglamani $\Omega = \{(t,x): 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ sohaga tadqiq etamiz. Bu yerda

$$ {}_{CF}D^{\alpha}{}_{0t}y(t) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^t y'(s) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)}, 0 < \alpha < 1 \quad (2) $$

- Kaputo-Fabritsiyo operatori va bu operator uchun

$$ {}_{CF}D_{0t}{}^{\alpha+n}y(t) = {}_{CF}D_{0t}{}^{\alpha}({}_{CF}D_{0t}{}^{n}y(t)), n \in \mathbf{N} $$

tenglik o’rinli [1], μ-berilgan haqiqiy son, *f(x,t)* esa berilgan yetarlicha silliq funksiya.

(1) tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalani tadqiq etamiz:

Masala. (1) tenglamaning Ω sohadagi

u(0,x)=u(1,x)=0, $0 \le x \le 1$ (3)

u(t,0)=u(t,1)=0, $0 \le t \le 1$ (4)

shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin.

Ushbu masalani o’zgaruvchilarni ajratish usuli bilan tatqiq etamiz [2].

Buning uchun $f(t,x) \equiv 0$ holatda (1) tenglamaning trivial bo’lmagan yechimini $U(t,x) = X(x)T(t)$ ko’rinishida izlaymiz. U holda

$$ {}_{CF}D_{0t}{}^{\alpha+1}U(t,x) + \mu \cdot {}_{CF}D_{0t}{}^{\alpha}U(t,x) - U_{xx}(t,x) = 0 $$

tenglamadan

$$X(x)\,{}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}T(t)+\mu\cdot X(x)\,{}_{CF}D_{0t}^{\alpha}T(t)-X''(x)T(t)=0$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni $X(x)T(t)\neq 0$ ga bo'lib

$$\frac{{}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}T(t)+\mu\cdot{}_{CF}D_{0t}^{\alpha}T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \qquad (5)$$

ni hosil qilamiz. Bundan kelib chiqadigan $X''(x)+\lambda X(x)=0$ tenglama va (4) shartdan kelib chiqadigan *X(0)=X(1)=0* shartlar birgalikda Shgurm-Liuvill spektral masalasini tashkil etadi. Bu masala $\lambda_n=(n\pi)^2, n\in\mathbf{Z}$ qiymatlarda $X_n(x)=\sin n\pi x$ xos funksiyalarga ega bo'ladi [2]. Bu xos funksiyalar sistemasi L_2 fazoda to'la ortonormal sistema tashkil etadi [3]. Shu sababdan, (1),(3),(4) masalaning yechimini

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin n\pi x \qquad (6)$$

ko'rinishida izlaymiz.

Berilgan funksiya *f(t,x)* ni ham (6) kabi qatorga yoyib olamiz:

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin n\pi x, \qquad (7)$$

bu yerda $f_n(t,x)=2\int_0^1 f(t,x)\sin n\pi x dx$.

(6) va (7) ni (1) ga qo'ysak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{CF}D_{ot}^{\alpha+1}U_n(t)\sin n\pi x+\mu\cdot\sum_{n=1}^{\infty}{}_{CF}D_{ot}^{\alpha}U_n(t)\sin n\pi x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2U_n(t)\sin n\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin n\pi x$$

ni olamiz. Bu yerdan esa,

$${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U_n(t)+\mu\,{}_{CF}D_{0t}^{\alpha}U_n(t)+(n\pi)^2U_n(t)=f_n(t) \qquad (8)$$

tenglamani olamiz. (3) shartdan esa $U_n(0)=U_n(1)=0$ shartlar kelib chiqadi. (8) tenglamaning bu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $A^2(\alpha)=4B(\alpha)$ holda quyidagi ko'rinishida yoziladi [4]:

$$U_n(t)=e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t}\int_0^1\hat{f}_n(s)G(t,s)ds, \qquad (9)$$

Bu yerda

$$U_n(t)=e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t}\int_0^1\hat{f}_n(s)G(t,s)=\begin{cases}e^{\frac{A(\alpha)}{2}(t-s)}t(s-1), 0\le t\le s,\\ e^{\frac{A(\alpha)}{2}(t-s)}s(t-1), s\le t\le 1,\end{cases}$$

$$A(\alpha)=\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\mu+(n\pi)^2(1-\alpha),\quad B(\alpha)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}-\mu\right],$$

$$\hat{f}_n(t)=(1-\alpha)e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t}\left[f_n'(t)+\frac{\alpha}{1-\alpha}f_n(t)\right].$$

Haqiqatan ham, oldin (8) tenglamani (2) ko'rinishdan foydalanib quyidagicha yozib olish mumkin:

$$z_n''(t)-A(\alpha)z_n'(t)+B(\alpha)z_n(t)=\hat{f}_n(t),\qquad (10)$$

$$z_n(t)=U_n(t)e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}t}.$$

(10) tenglamaning koeffitsiyentlari (8) tenglamaning tartibiga bog'liqligini sezish qiyin emas. Demak, (8) integro-differensial tenglama avval koeffitsiyentlari α tartibga bog'liq (10) tenglamaga keltirildi. So'ngra bu tenglama tegishi chegaraviy shartlar asosida Grin funksiyasi yordamida (9) formula bilan beriladi. Bunda (10) tenglamaning xarakteristik tenglamasi muhim rol o'ynaydi. Biz faqat bir holatni, ya'ni, $A^2(\alpha)=4B(\alpha)$ bo'lgan holdagina yechimni yozdik. Boshqa holatlar ham alohida qarab chiqilishi mumkin.

(9) ni hisobga olsak, (6) ni

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}t}\int_0^1\hat{f}_n(s)G(t,s)ds\sin\pi x\qquad (11)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (11) va $U_{xx}(t,x)$, ${}_{CF}D_{0t}^{\alpha+1}U(t,x)$ funksiyalarga mos keluvchi chekli qatorlarning tekis yaqinlashishini isbotlash uchun berilgan funksiya *f(t,x)* kerakli shartlar qo'yiladi. Xususan, (11) qatorning tekis yaqinlashishi uchun $f(t,x)\in C(\bar{\Omega}),\ \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t\partial x}\in C(\Omega)$ ekanligi yetarlidir.

Demak, quyidagi tasdiq o'rinli:

Teorema. Agar $A^2(\alpha)=4B(\alpha)$ va $f(t,x)\in C(\bar{\Omega}),\ \frac{\partial^3 f(t,x)}{\partial t\partial x^2}\in C(\Omega)$ bo'lsa, u holda (1),(3),(4) masalaning yechimi mavjud, yagona va (11) ko'rinishidan ifodalanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. M.Caputo,M.Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progr.Frac.Differ.Appl. 2015, №1,pp.1-13.
2. M.Salohiddinov. Matematika-fizika tenglamalari. O'qituvchi, 2002 y.
3. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983, 188 стр.

4. G.Yusubjonova. Koeffitsiyenti tenglama tartibiga bog’liq differensial tenglama uchun bir chegaraviy masala haqida. “Yosh matematiklarning yangi teoremalari-2022” ilmiy anjumani to’plami. Namangan. 13-14-may, 2022.