TAKRORIY KOMBINATSIYAGA OID MASALALAR YECHISH METODIKASI

Sayfullayeva Shahlo Shavkatovna
Buxoro davlat universiteti, Fizika-matematika fakulteti talabasi

Ma'lumki, umumiy o'rta ta'lim maktab darsliklarida matematika fanining kombinatorika elementlari va ehtimollar nazariyasi bo'limlarining boshlang'ich tushunchalari mavjud. Hozirda maktab o'quvchilari takroriy kombinatsiyalardan foydalanib masalalar yechishda qiyinchilikka uchrashishadi. Ushbu maqolada takrorli o'rinlashtirishlar, takrorli o'rin almashtirishlar, takroriy kombinatsiyalar formulalarini o'zaro farqlari hamda ularga doir masalalar yechishda qo'llash usullarini misollar yechish orqali ko'rsatamiz.

Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to'plamdan uning qandaydir xossaga ega bo'lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma'lum bir tartibda joylashtirishga to'g'ri keladi.

Ta'rif. Biror chekli to'plam elementlari ichida ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlaridan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi.

Masalan, o'nta ishchidan to'rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligi (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarni almashtirib ekish (agronomiya), davlat byudjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo'yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo'nalishlarida qo'llanishini ko'rsatadi [1-3].

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo'lib olmon matematigi G.Leybnits o'rgangan va 1666 yilda «Kombinatorika san'ati haqida» asarini chop etgan.

Takrorli o'rinlashtirishlar

Bizga qandaydir $X = (1,2,3)$ to'plam elementlaridan komponentalari takrorlanadigan juftliklarni topish talab qilinsin. Bu juftliklar

$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$ jami 9 ta bo’lar ekan. Agar to'plam elementlari ko'p bo'lsa, u holda ish ancha murakkablashadi shuning uchun formula topish talab qilinadi.

Teorema: A va B chekli to'plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soni shu to'plamlar elementlari sonlarining ko'paytmasiga teng:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \qquad (1)$$

Umuman olganda m ta elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan takrorlanadigan k ta komponentali k taliklar soni k ta bir xil to'plam $X \times X \times \ldots \times X$ to'plam elementlarining soniga teng (teoremaga ko'ra), bu son k ta $n(X)$ ko'paytuvchi ko'paytmasidan iborat:

$$n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X) = \left(n(X)\right)^k = m^k.$$

Ta'rif: m ta elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan va komponentalari takrorlanadigan k taliklar m elementdan k tadan olib tuzilgan takrorli o'rinlashtirishlar deyiladi va uni biz $\bar{A}_m^k$ orqali belgilaymiz.

Demak,

$$\bar{A}_m^k = m^k \qquad (2)$$

1-masala. Bankning sifrli kodi yetti xonali sondan iborat kodlashtirganda nechta turli kombinatsiya tuzish mumkin.

Yechish. Demak, bizga ma'lumki matematikada 10 ta raqam bor $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$. Shu raqamlar yordamida mumkin bo'lgan barcha 7 xonali sonlarni topish talab qilinadi. Albatta raqamlar takrorlanishi mumkin.

Kodlashtirilganda hamma sonlar ham 0 bo'lishi (0000000) yoki 1 bo'lishi (1111111), yoki .... bo'lishi mumkin. Masala shartiga ko'ra $m = 10$, $k = 7$, formulaga asosan $\bar{A}_m^k = m^k = \bar{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000.$

2-masala. 1,3,5,9 raqamlardan nechta 3 xonali son tuzish mumkin.

Yechish. Bu masalani ikki xil usul bilan ishlab ko'rsatamiz.

1-usul. Ko'paytirish qoidasi yordamida ya'ni deylik 3 ta xona bor, birinchi xonaga 4 ta raqamdan xohlagan birini qo'yishimiz mumkin, ikkinchi xonaga yana 4 ta raqamdam birini qo'yishimiz mumkin, uchinchi xonaga yana 4 ta raqamdam birini qo'yishimiz mumkin, demak $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

2-usul. Takrorli o'rinlashtirishlar formulasiga asosan $\bar{A}_4^3 = 4^3 = 64$ ga teng bo'ladi.

3-masala. Birinchi o'rinda 3 raqami, ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi va beshinchi o'rinlarda $0, 1, 2, \ldots, 9$ raqamlaridan istalgan biri turadigan nechta telefon raqami bor?

Yechish. Demak, besh xonali sonning birinchi raqami 3 bilan boshlanishi kerak, qolganlari 0, 1, 2, . . . , 9 raqamlardan biri bo'lishi mumkin ekan.

Formulaga asosan $m = 1, k = 4, \bar{A}_m^k = m^k = \bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$ ta

3 raqam bilan boshlangan telefon raqami bor ekan.

Takrorli o'rin almashtirishlar

Anagramma – bu berilgan so'zning harflarini almashtirib hosil qilingan so'z (ma'noga ega bo'lishi shart emas).

4-masala. Kitob so'zida jami nechta anagramma bor? Qalam so'zidachi? Matematika so'zidachi?

Yechish. Kitob so'zida 5 ta har-xil harf bor, shu sababli o'rinlashtirish formulasiga asosan $P_n = n! = 5!$ ga teng bo'ladi. Yoki ko'paytirish qoidasiga ko'ra quyidagicha bayon qilish mumkin, deylik beshta katak bor. Shu kataklarga (har-bir katakka 1 ta harf joylashadi) 5 ta harflarni joylashtirib chiqish kerak demak. Birinchi katakka 5 ta harfdan birini olish mumkin. Ikkinchi katakka qolgan 4 ta harfdan birini olish mumkin, uchinchi katakka qolgan 3 ta harfdan birini olish mumkin, to'rtinchi katakka qolgan 2 ta harfdan birini olish mumkin va beshinchi katakka qolgan 1 ta harf olinadi, natijada $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

Qalam so'zida esa 2 ta a harfi bor bu degan agar a lar o'rni almashsa ma'no o'zgarmaydi. Shuning uchun kombinatsiyalar soni $2!$ marta kamayadi, shu sababli $5!$ ni $2!$ ga bo'lish kerak. $P_5 = \frac{5!}{2!}$

Matematika so'zida 3 ta a harfi 2 ta m harfi 2ta t harfi bor. Bu harflarni o'rnini almashtirgan bilan so'zning o'qilishi bir xil bo'lib qolaveradi, jami $10!$ ta anagramma mavjud, ammo shu $10!$. Ichida bir-xil harflar o'rinlari almashganlari ham bor. Shu sababli kombinatsiyalar soni $3! \cdot 2! \cdot 2!$ marta kamaygan, shuning uchun $10!$ ni $3! \cdot 2! \cdot 2!$ ga bo'lib qo'yish kerak, demak $P_{10} = \frac{10!}{3!2!2!}$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif: Takrorli o'rin almashtirishlar deb, tarkibida a_1 harfi k_1 marta,..., a_m harfi k_m marta qatnashuvchi $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ uzunlikdagi har qanday k talikka aytiladi. Takroriy o'rin almashtirishlar soni $P(k_1, \dots, k_m)$ orqali belgilanadi.

5-masala. n turli shar va k ta turli yashik bor. Sharlarni birinchi yashikka n_1 ta, ikkinchi yashikka n_2, uchinchi yashikka n_3 ta, . . . , $k -$ yashikka n_k tadan qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin

$(n_1 + n_2 + n_3 + \ \dots\ + n_k = n)$?

demak,

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + \ \dots\ + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \qquad (3)$$

6-masala. O'qishni bilmaydigan bola alifbening kesilgan «A», «A», «A», «H», «H», «C» harflarini ixtiyoriy ravishda terib chiqdi. Bunda nechta turli so'z hosil bo'ladi?

Yechish. A harfi 3 ta, H harfi 2 ta, C harfi 1 ta demak, formulaga asosan

$$P(3,\ 2,1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60.$$

Takrorli kombinatsiyalar

7-masala. Beshta bir xil sharni uchta turli yashikka necha xil usulda joylashtirish mumkin? Yashikdagi sharlar soni uchun hech qanday shart yo'q.

Yechish. Uchta yashik olamiz va yashiklarni orasiga (bo'shliqlarga)

1 sonini yozamiz. Sharlarni 0 bilab belgilaymiz. Ya'ni 5 ta 0 va 2 ta 1 bor, misol uchun 0000011 degani 1-yashikda 5 ta shar bor. Ikkinchi yashikda shar yo'q, uchinchi yashikda ham shar yo'q degani, yana 1001000 yozuvda biz birinchi yashikda shar yo'qligini, ikkinchi yashikda 2 ta shar borligini, uchinchi yashikda esa 3 ta shar borligini tushunamiz. Demak, 5 ta 0 va 2 ta 1 sonlari yordamida mumkin bo'lgan takroriy kombinatsiyalar sonini toppish masalasiga keladi. Bunday kombinatsiyalar soni (3) formulaga ko'ra $\frac{7!}{5!2!}$ ga teng.

8-masala. $x+y+z=5$ tenglama nechta manfiymas butun yechimga ega?

Yechish. Bu masalani yechishda quyidagicha yo'l tutamiz. Beshta 1 olamiz, ya'ni 1,1,1,1,1 bu birlarni 3 ta qutiga joylashtiramiz (ixtiyoriy ravishda). Aytaylik, birinchi qutiga 3 ta 1 ni joylashtiramiz, ikkinchi qutiga 2 ta 1 ni joylashtiramiz, uchinchi qutiga 1 qolmaydi, ya'ni quti bo'sh yoki hamma birni birinchi qutiga joylashtiramiz, qolganlari bo'sh bo'lib qoladi. Yuqoridagi masala singari qutilar oralig'iga 1 qo'yib chiqamiz. Natijada jami 7 ta son hosil bo'ladi, bu sonlarni yordamida jami $\frac{7!}{5!2!}$ ta son topiladi.

Ta'rif: m xil elementdan k tadan olib, shunday k taliklar tuzish mumkin bo'lsinki, ular hech bo'lmaganda bir elementi bilan farq qilsin, bir xil elementlardan tuzilganlari teng deb hisoblansin (elementlarning tartibi ahamiyatsizdir). Bunday k taliklarga m elementdan k tadan olib tuzilgan takrorli kombinatsiyalar deyiladi. Ularning soni $\bar{C}_m^k$ orqali belgilanadi.

$$C_m^k = C_{k=m-1}^k = \frac{(k+m-1)!}{k!\,(m-1!)} \qquad (4)$$

ga teng.

9-masala. Do'konda apelsin, anor, shaftoli va olma sharbati sotilmoqda. Yetti dona meva sharbati sotib olish kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechish. (4) formulaga ko'ra,

$$C_7^4 = \frac{(7+4-1)!}{7!\,3!}.$$

O'quvchilarga kombinatorikaga oid misollarni tushuntirish o'qituvchidan mahorat talab qiladi. Ta'kidlab o'tamiz, maqolada ilgari surilgan asosiy g'oya - darsda yechish uchun yuqorida keltirilgani kabi bir-biriga o'xshash va avval osonroq, keyin qiyinroq bo'lgan misollarni tanlash tavsiya qilinishi hisoblanadi. Darsni shu tartibda tashkil qilish samarali natija beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Абдуҳамидов А.У., Насимов Ҳ.А., Носиров У.М., Ҳусанов Ж.Ҳ. Алгебра ва математик анализ асослари, 2-қисм. Тошкент, «Ўқитувчи», 2002 й.

2. Расулов А.С., Раимова Г.М., Саримсакова Х.Қ. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, 2005 й.

3. Зубков А.М., Севастьянов Б.А. Сборник задач по теории вероятностей Москва, Наука, 1999 г.