ALGEBRAVIK TENGLAMALARNI ECHISHDA GIPERGEOMETRIK QATORLARNI QO'LLANILISHI

https://doi.org/10.5281/zenodo.7852918

Turdaliyeva Maftunaxon Saydolim qizi
FarDU magistranti.

Kompleks tekislikda quyidagi chiziqli n-tartibli oddiy differensial tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$a_0(z)\omega^{(n)}+a_1(z)\omega^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(z)\omega'+a_n(z)\omega=0 \qquad (1)$$

bu yerda $a_j(z)$ ochiq $U\subset C$ to‘plamda golomorf funksiyalar. Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 1. $z_0\in U$ uchun shunday nuqta bo'lsinki, unda $a_0(z_0)\neq 0$ bo'lsin. U holda, shunday $\delta>0$ son mavjudki, $\{|z-z_0|<\delta\}$ aylanada (1) tenglamaning golomorf yechimlari vektor fazosi o'lchami *n* ga teng bo'ladi.

Ta'rif. $a_0(z_0)=0$ bo‘lsa, u holda $z_0\in U$ nuqta (1) ning maxsus nuqtasi deyiladi.

Umuman olganda, maxsus nuqta atrofida (1) yechimlari turlicha bo‘lishi mumkin. Misol uchun, $z^2\omega'+\omega=0$ tenglama nol nuqta yaqinida yechimga ega, $\omega=\exp(1\setminus z)$ funksiya esa, koordinata boshida muhim maxsuslikka ega. Biroq maxsus nuqtalarning o‘ziga xos turi mavjud. Ular quyidagi teorema bilan tavsiflanadi, ularning isbotini [12, 4-bob] yoki [26] da topish mumkin.

Teorema 2. z_0 nuqta (1) ning maxsus nuqtasi bo‘lsin. U holda quyidagilar ekvivalent bo‘ladi:

1) $b_k(z)=\dfrac{a_k(z)}{a_0(z)}$ funksiyalar z_0 da *k* tartib qutbga ega.

2) (1) tenglamaning yechimlari bo‘lgan $\{0<|z-z_0|<\delta\}$ yetarlicha kichik o'yilgan aylanada ko‘p qiymatli golomorf funksiyalarning vektor fazosi *n* o‘lchamga ega va quyidagi ko‘rinishdagi funksiyalar orqali hosil bo‘ladi.

$$(z-z_0)^{\lambda}\left(\ln(z-z_0)\right)^{j} f(z),$$

bu yerda $\lambda\in C$, $j\in Z$, $0\le j\le n-1$ va $f(z)$ $\{|z-z_0|<\delta\}$ doirada golomorf va $f(z_0)\neq 0$.

Agar bu shartlar bajarilsa, z_0 nuqta (1) tenglamaning regulyar maxsus nuqtasi deb ataladi. Masalan quyidagi

$$z^n\omega^{(n)}+b_1z^{n-1}\omega^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}z\omega'+b_n\omega=0 \qquad (2)$$

Eyler tenglamasi uchun koordinatalar boshi regulyar maxsus nuqta bo'ladi, bu yerda $b_1,\dots,b_n$ o'zgarmas sonlar, $\theta = z\partial_z$ deb, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$z^j\partial_z^j = \theta\cdot(\theta-1)\cdots(\theta-j+1)$$

va shuning uchun (2) tenglamani $L(\omega)=0$ ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi, bu yerda L-differentsial operator ushbu ko'rinishda aniqlanadi:

$$L=\sum_{j=1}^{n} b_{n-j}\theta\cdot(\theta-1)\cdots(\theta-j+1). \qquad (3)$$

Endi har qanday $\lambda\in C$ uchun $\theta\left(z^\lambda\right)=\lambda z^\lambda$ deb olaylik. U holda

$$L\left(z^\lambda\right)=p(\lambda)z^\lambda \qquad (4)$$

bu yerda $p(\lambda)$ ko'phad ushbu ko'rinishda aniqlanadi:

$$p(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda-j) \qquad (5)$$

Aniqki, agar $p(\lambda_0)=0$ bo'lsa, u holda $\omega=z^{\lambda_0}$ (2) ning nolning yaqinidagi golomorf yechimidir. Bundan tashqari, agar λ_0, p ning l karrali ildizi bo'lsa, u holda $(\ln z)^j z^{\lambda_0}$ funksiyalar $j=0,\dots,l-1$ lar uchun (2) ning yechimlari bo'ladi. Buni osongina tekshirish mumkin: (4) funksiyani z va λ larning funksiyalarining ayniyati sifatida qarash lozim. Agar λ_0, p ning l karrali ildizi bo'lsa, u holda ushbu

$$\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left(p(\lambda)z^\lambda\right)$$

funksiya $j=0,\dots,l-1$ uchun λ_0 da nolga aylanadi. Boshqa tomondan, $\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left(z^\lambda\right)=(\ln z)^j z^\lambda$ tenglik biz kutgan natijani beradi.

Teorema 3. (1) tenglama $z_1,\dots,z_k,\infty$ nuqtalarda maxsuslikka ega bo'lib, boshqa maxsus nuqtalari bo'lmasligi uchun

$$b_j(z)\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)^j c_j(z)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir, bu yerda $c_j(z)$ darajasi $j(k-1)$ dan oshmaydigan ko'phad.

3 teorema shartlarini qanoatlantiradigan tenglama Fuchsian tenglamasi deyiladi. 2-teorema Fuchsian tenglamasining maxsus nuqta atrofidagi yechimlarining tuzilishini tavsiflaydi. Yuqoridagi misolda ko'rib chiqilgan Fuchsian tenglamasi faqat 0 va ∞ nuqtalarda maxsuslikka ega. Eyler tenglamasining koordinata boshi atrofida lokal yechimlarini qurish uchun qo'llanilgan usul regulyar maxsus nuqta atrofida lokal yechimlarni qurish uchun umumlashtirilishi ham mumkin.

Aytaylik, (1) tenglama z_0 da regulyar maxsuslikka ega bo'lsin. Umumiylikni chegaralamasdan z_0 koordinata boshida deb faraz qilaylik. z_n orqali ko'paytirish (1)ni biz $L(\omega)=0$ sifatida qayta yozishimiz mumkin, bu yerda L differentsial operator quyidagicha aniqlanadi:

$$L=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}(z)\theta\cdot(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)$$

bu yerda $b_0(z)=1$ va $b_k(z)$ koordinata boshi atrofida golomorf.

(1) tenglamaning yechimini ushbu ko'rinishda qidiramiz:

$$\omega(z)=z^{\lambda}\sum_{r=0}^{\nu}\sum_{j=0}^{\infty}u_{rj}(\ln z)^{r}z^{j}\,; \qquad u_{00}=1,\ \lambda\in C \qquad (6)$$

bu yerda u_{rj} noma'lum kompleks koeffitsientlar. Agar (6) qator (1)ning maxsus nuqta atrofidagi yechimi ekanligidan, uning maxsus nuqta o'yib olingan atrofida yaqinlashishi kelib chiqadi.

(5) ga o'xshash quyidagi ko'phadni aniqlaylik:

$$p^{(j)}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{b_{n-k}^{(j)}(0)}{j!}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda-j) \qquad (7)$$

Biz $p(\lambda)=p^{(0)}(\lambda)$ ko'phadni L operatorining ko'rsatkichli ko'phadi deb ataymiz. Quyida Frobenius teoremasining oddiy ko'rinishini keltiramiz:

Teorema 4. $\lambda_0\in C$ $p(\lambda)$ ning μ karrali ildizi bo'lsin. Bundan tashqari, barcha $j\in N$ lar uchun $p(\lambda+j)\neq 0$ deb faraz qilaylik. U holda, μ ta chiziqli erkli (6) qator mavjud bo'lib, $\lambda=\lambda_0$ va $\nu<\mu$ da $L(\omega)=0$ bo'ladi.

Isbot. Ayatylik, $\omega(z)$ (6) dagi r=0 kabi bo'lsin. Bu holda u_j koeffitsientlarida ikkinchi indeksni tushiramiz. Bizda quyidagi tenglik bor:

$$L(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j L\left(z^{\lambda+j}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}u_{j-k}p^{(k)}(\lambda+k-j)z^{\lambda+j}$$

Shunday qilib, $z^{\lambda+j}$ koeffitsienti quyidagicha ifodalanadi:

$$u_j p(\lambda+j)+\sum_{k=1}^{j}u_{j-k}p^{(k)}(\lambda+k-j) \qquad (8)$$

va shuning uchun u_j koeffitsientlarini rekursiv ravishda topishimiz mumkin, shunda barcha $j\geq 1$ uchun (8) nolga aylanadi. Koeffitsientlarni tanlash uchun, quyidagicha deylik:

$$L(\omega)=p(\lambda)z^{\lambda}.$$

Bundan tashqari, (8) dan kelib chiqadiki, u_j koeffitsientlari λ ga ratsional ravishda $p(\lambda+k)$ ildizlarining qutblariga bog'liq bo'ladi, k=1,...,j. Demak, agar λ_0 - p

ning ildizi va barcha $j \in N$ uchun $p(\lambda_0 + j) \neq 0$ bo'lsa, u holda (6) dagi kabi *r*=0 va $\lambda = \lambda_0$ bo'lgan $L(\omega) = 0$ ning yechimi bo'lgan ω ni yagona usulda qurishimiz mumkin.

Agar λ - μ karrali ildiz bo'lsa, u holda yuqoridagi misolda bo'lgani kabi, $\partial_\lambda^\nu \omega(\lambda, z)$ ning ixtisoslashuvi barcha $\nu < \mu$ uchun L tomonidan yo'q qilinadi. Bu $L(\omega) = 0$ ning yechimi bo'lgan va $\nu < \mu$ ga ega bo'lgan (6) qatorni beradi.

Izoh. (6) ko'rinishdagi yechimlar qatorini qurish butun ildizlarga ega bo'lgan ko'rsatkichli ko'phad holatga kengaytirilishi mumkin. Masalan, $p(\lambda)$, λ_3, $\lambda_2 = \lambda_3 + a$ va $\lambda_1 = \lambda_3 + b$ ildizlarga ega bo'lsin, bu yerda *b*>*a* musbat butun sonlar va bundan boshqa bunday formadagi ildizlari mavjud bo'lmasin. Bundan tashqari, bu ildizlar mos ravishda μ_3, μ_2 va μ_1 karrali bo'lsin. Shubhasiz, 4-teoremaning isbotidagi $p(\lambda_3 + a) = p(\lambda_3 + b) = 0$ bo'lgani uchun λ_3 qiymatida bajarilmaydi. Boshqa tomondan, agar biz qurishni quyidagicha o'zgartirish orqali

$$u_0 = (\lambda - \lambda_3)^{\mu_1 + \mu_2}$$

umumlashtirishimiz mumkin.

U holda $j = 0, \ldots, a-1$ lar uchun matematik induksiya orqali tekshirish mumkinki, u_j ning (8) da berilgani kabi $(\lambda - \lambda_3)^{\mu_1 + \mu_2}$ ko'paytuvchisi bor va shuning uchun u_a yaxshi aniqlangan bo'ladi, chunki $p(\lambda + a)$ λ_3 da μ_2 tartibli nolga ega. Lekin, $(\lambda - \lambda_3)^{\mu_1 + \mu_2}$ ko'paytuvchiga barcha u_j, $j < a$ larda e'tiborli bo'lish kerak. Xuddi shunday hamma $a \le j < b$, u_j lar uchun $(\lambda - \lambda_3)^{\mu_1 + \mu_2}$ ko'paytuvchi bor va biz u_b koeffitsient yaxshi aniqlanganligini yuqoridagi kabi ko'rsatishimiz mumkin.

Biroq, $\lambda = \lambda_3$ o'rniga qo'yish u_j, $j < b$ koeffitsiyentlar hammasi yo'q bo'lishining natijasida bo'lardi va demak biz bosh hadi z^{λ_1} bo'lgan qatorni olamiz. Boshqa tomondan, agar biz quyidagi qatorni etiborga olsak

$$\partial_\lambda^b \left(w(\lambda, z) \right)$$

va uni λ_3 da baholaymiz, $L(\omega) = 0$ ning yechimi bo'lgan va bosh hadi z^{λ_3} bo'lgan (6) ko'rinishdagi qatorni olamiz. Keyingi hosilalarni olib, biz $\mu_3 - 1$ qator yechimlarini qurishimiz mumkin. Shu tarzda, Fuchsian tenglamasini hisobga olgan holda, biz har bir maxsus nuqta atrofidagi yechimlar qatorining asosini qurishimiz mumkin.

Ushbu Gaussning gipergeometrik tenglamasini qaraylik

$$z(z-1)\partial_z^2 F + \left((\alpha + \beta + 1) z - \gamma \right) \partial_z F + \alpha\beta F = 0$$

U 0, 1 va ∞ nuqtalarda regulyar maxsusliklarga ega. 0 dagi ko'rsatkichli ko'phadi quyidagicha

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = \lambda\left(\lambda - (1 - \gamma)\right)$$

aniqlanadi.

Shunday qilib, agar $\gamma \notin Z_{\leq 0}$ bo'lsa, u holda 0 ko'rsatkichli ko'phadning ildizidir va hech qanday musbat son ildiz bo'lmaydi. Demak, Gauss tenglamasining yechimini darajali qator ko'rinishida qurishni 4-teorema isbotidagidek bajarishimiz mumkin. Bundan tashqari, agar $\gamma \neq 1$ bo'lsa, 0 soni p ning oddiy ildizidir.

Yechimni 0 ildizga mos keladigan koordinata atrofida qurish uchun Gauss differensial operatori uchun $(\theta_x+\alpha)(\theta_x+\beta)F=(\theta_x+\gamma)\partial_x F$ ni x ga ko'paytirishimiz mumkin va ushbu differensial tenglamani olamiz:

$$\left(\left(\theta_z-1+\gamma\right)\theta_z-\left(\theta_z+\alpha\right)\left(\theta_z+\beta\right)\right)F=0.$$

Ushbu differensial operatorni quyidagi

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j$$

qatorga qo'llab, quyidagini olamiz:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(j-1+\gamma\right)ju_j-\left(j-1+\alpha\right)\left(j-1+\beta\right)u_{j-1}\right)z^j .$$

Nol darajali ko'phad nolga aylanadi, chunki 0 ko'rsatkichli ko'phadning ildizidir. Shunday qilib, berilgan qator ushbu

$$\frac{u_j}{u_{j-1}}=\frac{\left(j-1+\alpha\right)\left(j-1+\beta\right)}{\left(j-1+\gamma\right)j}$$

tenglik bajarilganda va faqat shu holdagina yechimi bo'ladi. Bunda $u_0=1$ deb faraz qilsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$u_j=\frac{(\alpha)_j(\beta)_j}{(\gamma)_j\, j!}.$$

Boshqacha qilib aytganda, biz Gaussning gipergeometrik qatori ${}_1F_2\left(\alpha,\beta,\gamma;z\right)$ ni tikladik.

FOYDALANOLGAN ADABIYOTLAR:

1. A. Adolphson. Hypergeometric functions and rings generated by monomials. Duke Math. J., 73(2):269–290, 1994.

2. B. Sturmfels. Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series. Discrete Math., 210(1-3):171– 181, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Minneapolis, MN, 1996).

3. D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman, and B. Sturmfels, editors. Computations in algebraic geometry with Macaulay 2, volume 8 of Algorithms and Computation in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

4. E. A. Coddington and N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

5. E. L. Ince. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, New York, 1944.