ОЦЕНКИ РАЗНОСТНЫХ ПСЕВДОМОМЕНТНОВ В ЗОНАХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

https://doi.org/10.5281/zenodo.7852572

Ахмедов Сохибжон Акбарович
Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан
Турсунов Бекзод Бурхон огли
Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан

Абстракт. Асимптотические приближения функций распределений сумм независимых или зависимых случайных величин является классической задачей теории вероятностей и математической статистики. В данной статье методом семиинвариантов получена общая лемма для оценки абсолютных псевдомоментов ,в случае когда предельным распределением является нормальной.Для того чтобы получить аналогичные оценки в предельных теоремах для сумм независимых или зависимых случайных величин достаточно получить оценку семиинвариантов типа Статулявичуса

Ключевые слова: Семиинварианты**,** условие Статулявичуса,неравномерная оценка, разностный псевдомомент,вероятности больших уклонений.

ESTIMATES OF DIFFERENT PSEUDO-MOMENTS IN THE ZONES OF LARGE DEVIATIONS.

Abstract. Asymptotic approximations of functions of distributions of sums of independent or dependent random variables are a classical problem of probability theory and mathematical statistics. In this article, a general lemma is obtained by the method of cumulants for estimating absolute pseudo-moment, in the case when the limit distribution is normal.In order to obtain similar estimates in limit theorems for sums of independent or dependent random variables, it is sufficient to obtain an estimate of cumulants of the Statulavicius condition.

Keywords: Cumulants, the Statulavicius condition,unevene stimate, difference pseudo-moment, probabilities of large deviations.

Рассмотрим случайную величину (сл.в) $\eta = \eta_\Delta$, зависящую от параметра Δ, с функцией распределения $F_\eta(x) = P(\eta < x)$ с средним $E\eta = 0$ и дисперсией $D\eta = 1$.

Обозначим $\Gamma_k\{\eta\} -$ семиинвариант $k -$ го порядка сл.в η, $\Phi(x) = P(N < x) -$ (0,1) нормальное распределение, $\chi_s(\eta, N) = s\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx$ разностные псевдомоменты порядка $s \geq 1$.

Предположим что существуют постоянные $\gamma \geq 0$, $H > 0$, $\Delta > 0$ такие, что выполнено условие Статулявичуса:

$$|\Gamma_k\{\eta\}| \leq H(k!)^{1+\gamma}/\Delta^{k-2}\ , k = 3,4, \dots, l$$

В настоящей работе получены некоторые общие оценки для величин $\chi_s,(\eta, N)$ при условии (S_γ).

Оценка для $\chi_s,(\eta, N)$ опирается на общие неравномерные оценки для величины $|F_\eta(x) - \Phi(x)|$, полученным использованием общую лемму о вероятностях больших уклонений [1], а также на экспоненциальные оценки распределения сл.в [2].

Лемма 1. Пусть сл.в η с $E\eta = 0$ и $D\eta = 1$ выполнено условие (S_γ). Тогда

1) При $0 \leq x \leq 1$

$$|F_\eta(-x) - \Phi(-x)| \leq |F_\eta(x) - \Phi(x)| \leq c(\delta, \gamma)/\Delta^{1/(1+2\gamma)} \quad (1)$$

Где $c(\delta, \gamma) = \frac{2160}{\delta}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{1/(1+2\gamma)} \left(1 + \frac{2560}{\delta^4 e^4}\right), 0 < \delta < 1;$

2) При $1 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$

$$|F_\eta(-x) - \Phi(-x)| \leq |F_\eta(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c(\delta,\gamma)}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^3 exp\{-x^2/2\}}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}} \quad (2)$$

Доказательство. Используя общую лемму о вероятностях больших уклонений [1], в интервале $1 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$ можно получить следующую оценку:

$$|F_\eta(-x) - \Phi(-x)| \leq |F_\eta(x) - \Phi(x)| \leq (1 - \Phi(x))\Big\{|1 - exp\{L_\gamma(x)\}| +$$

$$|1 - exp\{L_\gamma(x)\}| \cdot |f_j(x)| \cdot \frac{x+1}{\Delta_\gamma} + |f_j(x)| \cdot \frac{x+1}{\Delta_\gamma}\Big\} \quad (3)$$

Здесь

$$L_\gamma(x) = \sum_{3 \leq i < q} \lambda_i x^i + \theta(x/\Delta_\gamma)^3, q = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma} + 2, & \gamma > 0 \\ \infty, \gamma = 0, |\theta| < 1 \end{cases}$$

λ_i выражаются через семиинварианты сл.в η, причем

$$L_\gamma(\pm x) \leq \frac{x^3}{2(x + 8\Delta_\gamma)}, \quad (4)$$

$f_j(x) = \frac{60\left(1+10\Delta_\gamma^2\, exp\{1-x/\Delta_\gamma\}\sqrt{\Delta_\gamma}\right)}{1-x/\Delta_\gamma}, j = 1,2\ \Delta_\gamma$ приведено в (1)

Пуст далее $0 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$. Тогда используя (4) легко проверить, что $L_\gamma(\pm x) \leq \frac{1}{2}$ и следовательно

$$|1 - exp\{L_\gamma(\pm x)\}| \leq 2|L_\gamma(\pm x)| \leq \frac{x^3}{x + 8\Delta_\gamma} \quad (5)$$

Обозначим

$$\delta = \inf_{\Delta}\left(1 - 1/\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}\right)$$

причем при достаточно больших $\Delta > 0$ можно показать, что $0 < \delta < 1$.

Далее при $0 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$, элементарным путем получим

$|f_j(x)| \leq \frac{60}{\delta}\left(1+\frac{2560}{\delta^4 e^4}\right), j = 1,2$ (6)

Пусть теперь $0 \leq x \leq 1$, то используя (5) и (6) из (3) получим (1). Если $0 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$, то имея ввиду, что

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} exp\{-x^2/2\}$ (7)

(см.[3].стр.192) используя также (5) и (6) из (3) получим (2)

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть сл.в η с $E\eta = 0$ и $D\eta = 1$ выполнено условие (S_γ). Тогда существует постоянная $c(\delta,\gamma)$, что имеет место оценко:

$\chi_s(\eta, N) \leq c(\delta,\gamma)/\Delta^{1/(1+2\gamma)}$ (8)

Доказательство. Имеем

$$\chi_s(\eta,N) = s\int_{|x|\leq\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}\,|F_\eta(x)-\Phi(x)|\,dx + s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}\,|F_\eta(x)-\Phi(x)|\,dx$$
$$\leq s\int_{|x|\leq\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}|F_\eta(x)-\Phi(x)|\,dx + s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}\, P(N\geq x)\,dx$$
$$+ s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}\, P(\eta \geq x)\,dx = J_1 + J_2 + J_3 \qquad (9)$$

Далее J_1 оценим через (1) и (2). J_2 при помощи (7), а J_3 оценкой полученной в [2]: если выполнено условие (S_γ), то для всех $x \geq 0$

$P(\pm\eta \geq x) \leq exp\{-x^2/4H\}$, если $0 \leq x \leq (H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}$:
(10)

$P(\pm\eta \geq x) \leq exp\left\{-\frac{1}{4}(x\,\Delta)^{1/(1+2\gamma)}\right\}$, если $x \geq (H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}$ (11)

Оценим J_1. Используя (1) и (2) имеем

$$J_1 = s\int_{-1}^{1} |x|^{s-1}|F_\eta(x)-\Phi(x)|dx + s\int_{1<|x|\leq\sqrt[3]{\Delta_\gamma}} |x|^{s-1}\,|F_\eta(x)-\Phi(x)|$$
$$\leq \frac{sc(\delta,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}\left(\frac{2}{s}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{s+2}exp\{-x^2/2\}dx\right)$$
$$\leq \frac{4sc(\delta,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{s+2}exp\{-x^2/2\}dx$$

Так как

$$E|N|^m = \begin{cases} \frac{m!}{2^{m/2}\left(\frac{m}{2}\right)!}, & m - \text{четное}; \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^{(m-1)/2}\left(\frac{m-1}{2}\right)!, & m - \text{нечетное}. \end{cases} \qquad (12)$$

Тогда взяв (12) $m = s + 2$ получим

$J_1 \leq \frac{c_i(s,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}, i = 1,2$ (13)

Где $c_i(s,\gamma) = \begin{cases} \frac{4sc(\delta,\gamma)(s+2)!}{2^{(s+2)}/_2\left(\frac{s+2}{2}\right)!}, & s - \text{четное}, i = 1 \\ 4sc(\delta,\gamma)\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{(s+1)}/_2\left(\frac{s+1}{2}\right)!, & s - \text{нечетное}, i = 1; \end{cases}$

Оценим J_2. Используя (7) получим

$$J_2 \leq \frac{2s}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}exp\{-x^2/2\}dx$$

Известно (см.стр.176 в [4], что

$\int_a^\infty x^p exp\{-x^2/2\}dx \sim a^{p-1}\, exp\{-a^2/2\}, a \to \infty$

(14)

Поэтому

$$\int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}exp\{-x^2/2\}dx \sim \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s-3} exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\}$$

при достаточно больших Δ_γ выражение

$$J_{2s}(\Delta_\gamma) = \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{3-s} exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\}\int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}exp\{-x^2/2\}dx$$

ограничена.

Обозначим

$$C_{2s} = \sup_{\Delta_\gamma \geq 1} J_{2s}(\Delta_\gamma)$$

Тогда

$J_2 \leq \frac{2sC_{2s}}{\sqrt{2\pi}\Delta_\gamma}\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^s exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\}$

(15)

Функция $M_{2s}(\Delta_\gamma) = \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^s exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\}$ достигает максимума при $\Delta_\gamma \geq 1$.

Обозначим

$M_{2s} = \sup_{\Delta_\gamma \geq 1} M_{2s}(\Delta_\gamma)$ (16)

Учитывая (16) из (15) имеем

$J_2 \leq \frac{2sC_{2s}M_{2s}}{\sqrt{2\pi}c_\gamma}\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}$ (17)

Оценим теперь J_3. Используем (10) и (11).

Пусть

$$\sqrt[3]{\Delta_\gamma} \leq \left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)^1/_{(1+2\gamma)}}$$

Тогда

$$J_3 \le 2s \int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}} x^{s-1}P(\eta \ge x)dx + 2s \int_{(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty} x^{s-1}P(\eta \ge x)dx$$

$$\le 2s \int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-1}exp\left\{-x^2/_{4H}\right\}dx$$

$$+ 2s \int_{(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty} x^{s-1}exp\left\{-\frac{1}{4}(x\Delta)^{1/(1+2\gamma)}\right\}dx = J_3{}' + J_3{}''$$

Для оценки $J_3{}'$ еще раз используем (14). Имеем

$$\int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-1}exp\left\{-x^2/_{4H}\right\}dx$$

$$= \left(\sqrt{2H}\right)^s \int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^{s-1} exp\left\{-\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^2\Big/2\right\} d\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right) \sim \left(\sqrt{2H}\right)^s \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s-2} exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}\Big/2\right\}$$

Обозначим

$$C'_{3s} = \sup_{\Delta_\gamma \ge 1} J'_{3s}(\Delta_\gamma), M'_{3s} = \sup_{\Delta_\gamma \ge 1} M'_{3s}(\Delta_\gamma)$$

где

$$J'_{3s}(\Delta_\gamma) = \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{2-s} exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\} \int_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^{s-1} exp\left\{-\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^2/2\right\} d\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)$$

$$M'_{3s}(\Delta_\gamma) = \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s+1} exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma{}^2}/2\right\}$$

Тогда

$$J_3{}' \le 2s\left(\sqrt{2H}\right)^s C'_{3s}(\Delta_\gamma)M'_{3s}/c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)} \quad (18)$$

Для оценки $J_3{}''$ используем следующее асимптотическое соотношение (см.[5], стр.35)

$$\int_a^{\infty} x^{p-1} \exp\{-\beta x^\mu\} dx \sim \frac{1}{p} a^p exp\{-\beta a^\mu\}, a \to \infty \quad (19)$$

Взяв $p = s, \beta = \frac{1}{4}, a = (H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}, \mu = \frac{1}{1+2\gamma}$ из (19) имеем

$$J_3{}'' \sim \frac{2s}{\Delta^s}\frac{1}{s}(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)} exp\left\{-\frac{1}{4}(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}$$

Обозначим

$$C_{3s}{}'' = \sup_{\Delta \ge 1} J_{3s}{}''(\Delta),\ M_{3s}{}'' = \sup_{\Delta \ge 1} M_{3s}{}''(\Delta),$$

где

$$J_3''(\Delta) = \frac{s\, exp\left\{\frac{1}{4}(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}}{(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}} \int\limits_{(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty} (x\Delta)^{s-1}\, exp\left\{-\frac{1}{4}(x\Delta)^{1/(1+2\gamma)}\right\} d(x\Delta),$$

$$M_3''(\Delta) = \Delta^{(1-2s\gamma)/(1+2\gamma)} exp\left\{-\frac{1}{4}(H^{1+\gamma}\Delta)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}$$

Тогда

$$J_3'' \le 2sH^{\frac{s(1+\gamma)}{1+2\gamma}} C_{3s}'' M_{3s}''/\Delta^{1/(1+2\gamma)}. \quad (20)$$

Итоге из (18) и (20) получим

$$J_3 \le 2s\left(\frac{(\sqrt{2H})^s}{c_\gamma} C_{3s}' M_{3s}' + H^{\frac{s(1+\gamma)}{1+2\gamma}} C_{3s}'' M_{3s}''\right)\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}} \quad (21)$$

Окончательно используя (13), (17) и (21) из (9) получим (8):

$$\chi_s,(\eta, N) \le \left((c_i(s,\gamma) + \frac{2sC_{2s}M_{2s}}{\sqrt{2\pi}c_\gamma} + 2s\left(\frac{(\sqrt{2H})^s}{c_\gamma} C_{3s}' M_{3s}' + H^{\frac{s(1+\gamma)}{1+2\gamma}} C_{3s}'' M_{3s}''\right)\right)\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}} = c(s,\gamma)/\Delta^{1/(1+2\gamma)}$$

Лемма 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рудзкис Р., Саулис Л., Статулявичус В. Обшая лемма о вероятностях больших уклонений. // Литовск. матем. сб. – 1978. – Т. XVIII, №2. – С. 99 – 116.
2. Бенткус Р., Рудзкис Р. Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин. // Литовск. матем. сб. – 1980. – Т. XX, №1. – С. 15 – 30.
3. Феллер В. Введение и теорию вероятностей и ее приложения. Т.I. – М., Мир. 1984. 528 с.
4. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
5. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с