О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

https://doi.org/10.5281/zenodo.7847187

Нафиса Аббасова

Магистрант 2 курса Ферганского государственного университета

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольнике $\Omega = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \le x \le a,\, 0 \le x \le b \right\}$, здесь $u = u(x, y)$ - неизвестная функция $a, b = const$.

Задача. Найти функцию

$$u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega} \cap \{x = 0\}\right) \cap C^2(\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(x, 0) = \tau(x) \qquad (2)$$

$$u(x, b) = \varphi(x) \qquad (3)$$

$$u_x(0, y) = 0 \qquad (4)$$

и нелокальному условию

$$u(0, y) = u(a, y) \qquad (5)$$

где $\tau(x)$, $\varphi(x)$ – заданные непрерывные функции.

Условие (5) является нелокальным интегральным условием связывающие значения искомой функции на границах $x = 0$, $x = b$.

Теорема. Если существует решение задачи (1)–(5), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1)–(5). Известно [1], что системы функций

$$\left\{ \cos \frac{2\pi n x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty},\ 1,\ \left\{ x \sin \frac{2\pi n x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (6)$$

$$\left\{ 4(a - x) \cos \frac{2\pi n x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty},\ 2(a - x),\ \left\{ 4 \sin \frac{2\pi n x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (7)$$

являются биортонормированными системами, полны и образуют базис Рисса в пространстве $L_2[0,\ 1]$. Рассмотрим функции

$$u_n(y) = 4\int_0^a u(x, y)(a - x) \cos \frac{2\pi n x}{a} dx,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (8)$$

$$u_0(y) = 2\int_0^a u(x,y)(a-x)\,dx, \qquad (9)$$

$$v_n(y) = 4\int_0^a u(x,y)\sin\frac{2\pi nx}{a}\,dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \qquad (10)$$

Дифференцируя дважды $v_n(y)$ под знаком интеграла и учитывая уравнение (1), получим

$$v_n''(y) = -4\int_0^a u_{xx}''(x,y)\sin\frac{2\pi nx}{a}\,dx$$

Интегрируя по частям, с учетом условий (2) – (5), заключаем, что $v_n(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$v_n''(y) - \left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 v_n(y) = 0 \qquad (11)$$

и начальным условиям

$$v_n(0) = 4\int_0^a \tau(x)\sin\frac{2\pi nx}{a}\,dx = \tau_n, \qquad (12)$$

$$v_n'(0) = 4\int_0^a \nu(x)\sin\frac{2\pi nx}{a}\,dx = \nu_n. \qquad (13)$$

Решение задачи (11)–(13) существует, единственно и имеет вид

$$v_n(y) = \tau_n ch\frac{2\pi ny}{a} + \frac{a\nu_n}{2\pi n} sh\frac{2\pi ny}{a}. \qquad (14)$$

Найдем теперь $u_0(y)$. Дифференцируя (9) дважды по y и учитывая уравнение (1), имеем

$$u_0''(y) = 2\int_0^a u_{yy}''(x,y)(a-x)\,dx = -2\int_0^a u_{xx}''(x,y)(a-x)\,dx$$

Интегрируя по частям и на основании условий (4)–(6) получим, что $u_0(y)$ является решением задачи Коши

$$u_0''(y) = 0, \qquad (15)$$

$$u_0(y) = 2\int_0^a \tau(x)(a-x)\,dx = \tau_0, \quad u_0'(y) = 2\int_0^a \nu(x)(a-x)\,dx = \nu_0. \qquad (16)$$

Единственное решение задачи (15) и (16) определяется равенством

$$u_0(y) = \nu_0 y + \tau_0. \qquad (17)$$

Далее, с учетом (4)–(6) найдем явный вид для функции $u_n(y)$. Для этого дважды дифференцируя равенство (8) и учитывая уравнение (1), получим

$$u_n''(y)=4\int_0^a u_{yy}''(x,y)(a-x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx=-4\int_0^a u_{xx}''(x,y)(a-x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx.$$

Интегрируя по частям два раза первое слагаемое, для функции $u_n(y)$ получаем неоднородное уравнение

$$u_n''(y)-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 u_n(y)=-\frac{4\pi n}{a}v_n(y) \qquad (18)$$

с начальными условиями

$$u_n(0)=4\int_0^a \tau(x)(a-x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx=\tau_{1n}, \qquad (19)$$

$$u_n'(0)=4\int_0^a \nu(x)(a-x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx=\nu_{1n}. \qquad (20)$$

Единственное решение задачи (18)–(20) представляется в виде

$$u_n(y)=\left(\tau_n-\frac{2\pi n}{a}\nu_n y\right)\operatorname{ch}\frac{2\pi n}{a}y+\left(\left(\frac{2\pi n}{a}+\frac{a}{2\pi n}\right)\nu_n+\tau_n y\right)\operatorname{sh}\frac{2\pi n}{a}y. \quad (21)$$

Из формул (14), (17), (21) следует единственность решения задачи (1)–(5): если $\tau(x)\equiv 0$, $\nu(x)\equiv 0$ на $[0,\ a]$, то $u_n(y)\equiv 0$, $u_0(y)\equiv 0$, $\nu_0(y)\equiv 0$ для $n=1,2,\ldots$ на $[0,\ b]$. Тогда из (8)–(10) имеем

$$4\int_0^a u(x,y)(a-x)\cos\frac{2\pi nx}{a}dx=0,\ 2\int_0^a u(x,y)(a-x)dx=0$$

$$4\int_0^a u(x,y)\sin\frac{2\pi nx}{a}dx=0, \quad n=1,2,\ldots$$

В силу полноты системы (7) в пространстве $L_2[0,a]$ функция $u(x,y)\equiv 0$ в Ω.

1. Моисеев Е.И. *О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи* // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №8. – С. 1094–1100.