KVATERNION SONLAR TO‘PLAMIDA KVADRAT TENGLAMANI YECHISH

Mamajonov J.D.[1], **Ismoilov.M.X.**[2], **Muxtorov T.Sh.**[3]

[1] Fizika matematika fanlari doktori (DSc),Farg‘ona davlat universiteti, dotsent;
jmamajonov@gmail.com

[2] Farg‘ona davlat universiteti, o‘qituvchi, ismoilovmuhtorzon140@gmail.com

[3] Farg‘ona davlat universiteti, magistrant;
toshpolatjon12.11@gmail.com;

Anotatsiya: kvarternion sonlar toplamida aniqlangan amallardan foydalanib kvadrat tenglama yechilgan. Kvadrat tenglamaning xususiy xolda yechildi va uning ildizlari topildi. Kvadrat tenglamaning yechimiga oid teorema keltirilgan, kvarternion sonning kvadrat ildizini topish formulasi keltirilgan.

Аннотация: квадратное уравнение решается с помощью операций, определенных в наборе чисел квартерниона. Квадратное уравнение было решено в частном случае, и его корни были найдены. Приведена теорема о решении квадратного уравнения, приведена формула нахождения квадратного корня из числа квартернионов.

Abstract: the quadratic equation is solved using the operations defined in the set of quarternion numbers. The quadratic equation was solved in a special case, and its roots were found. The theorem on the solution of the quadratic equation is given, the formula for finding the square root of the number of quarternions is given.

Kalit so‘zlar: mavhum birlik, yo‘naltiruvchi vektorlar, kvaternion sonlar, distributivlik xossasi, bikvadrat tenglama, cheksiz ko‘p, kvadrat ildizi.

Ключевые слова: мнимыми единица, направляющие векторы, кватернионные числа, свойство распределения, биквадратичное уравнение, бесконечно много, квадратный корень.

Key words: imaginary unit, guiding vectors, quaternion numbers, distribution property, biquadratic equation, infinitely many, square root.

KIRISH

Odatda, kvaternionlarni ko‘paytirish mavhum birliklar va skalyar birliklarni ko‘paytirish jadvali yordamida aniqlanadi, so‘ngra distributivlik xossasidan foydalanib formulasi chiqariladi. Kvaternionlarni ko‘paytirishda qo‘shiluvchilarga nisbatan assisotivlik, distributivlik xossasi bajariladi, biroq umumiy holda kommutativlik xossasiga ega emas. Lekin, agar vektor qismlari kollinear bo‘lsa, kvaternionlarni ko‘paytirishda kommutativlik xossasi bajariladi. Umumiy holda kommutativlik xossasi bajarilmaganligi sababli qisqa ko‘paytirish formulalari noto‘g‘ri bo‘lib, ularga asosan haqiqiy va kompleks sonlar maydoni ustida kvadrat tenglamani yechish formulalari kelib chiqadi.

ВВЕДЕНИЕ

Обычно умножение кватернионов определяется с помощью таблицы умножения абстрактных единиц и скалярных единиц, а затем выводится формула с использованием свойства распределения. При умножении кватернионов выполняется свойство ассоциативности, дистрибутивности по отношению к аддитивам, но в общем случае не обладает свойством коммутативности. Однако, если части вектора коллинеарны, свойство коммутативности выполняется при умножении кватернионов. Поскольку свойство коммутативности в общем случае не выполняется, формулы короткого умножения неверны, и на их основе выводятся формулы решения квадратного уравнения над полем действительных и комплексных чисел.

INTRODUCTION

Usually, the multiplication of quaternions is determined using a multiplication table of abstract units and scalar units, and then a formula is derived using the distribution property. When multiplying quaternions, the property of associativity, distributivity with respect to additives is fulfilled, but in general it does not have the property of commutativity. However, if the parts of the vector are collinear, the commutativity property holds when multiplying quaternions. Since the commutativity property does not hold in the general case, the short multiplication formulas are incorrect, and on their basis formulas for solving a quadratic equation over a field of real and complex numbers are derived.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA (ЛИТЕРАТУРА И МЕТОДОЛОГИЯ / METHODS)

Kvarternionlaning tuzilishi ular ustidagi amallar [1] differensiallash qoidalaridan foydalanib xaqiqiy sonlarni kvarternion sonlarga akslantiruvchi funksiyalar va Fyuter xosilasi o ‘rganilgan [2] Kvarertnionlarnig aylanma harakati ular ustidagi amallar ularning uch o ‘lchovli vektor qismining harakati asosan burish qoidalari o ‘rganilgan[3,4]. Ushbu maqolada tahlil,induksiya metodlaridan foydalanildi.

NATIJALAR (РЕЗУЛЬТАТЫ/ RESULTS)

Kvaternion sonlar aylanma harakatga ega boʻlgan muammolarni hal qilishda juda qulay va samarali usul hisoblanadi [1]. Kvatarnion sonlar kompleks sonlarning umumlashmasi bolib, kompleks sonda $i^2 = -1$shartni qanoatlantiruvchi bitta mavhum birlik boʻlsa, kvatarnion sonlarda uchta shunday mavhum birlik mavjud boʻlib uni

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \qquad (1)$$

koʻrinishida aniqlanadi. Bu erda $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – lar berilgan haqiqiy sonlar bolib i, j, k – larni esa uch oʻlchovli fazodagi koordinata oqlaridagi yoʻnaltiruvchi vektorlar sifatida qarashimiz mumkin boʻlgan mavhum birliklar boʻlib $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ tengliklar orqali aniqlanadi.

Quyidagi

$$\vec{\lambda} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$$

vektorni berilgan kvaternion sonning mavhum yoki vektor qismi bo‘lib $\vec{v}(\lambda)$ kabi belgilaymiz. λ_0 esa berilgan kvaternion sonning haqiqiy qismi bo‘lib $\mathrm{Re}\lambda$ kabi belgilash kiritsak, u holga berilgan kvaternion sonni

$$\lambda = \mathrm{Re}\lambda + \vec{v}(\lambda) \qquad (2)$$

ko‘rinishida ifodalashimiz mumkin.

Berilgan $\lambda = \mathrm{Re}\lambda + \vec{v}(\lambda)$ va $\mu = \mathrm{Re}\mu + \vec{v}(\mu)$ kvaternion sonlarning ko‘paytmasi [1,2]

$$\lambda \cdot \mu = \mathrm{Re}\lambda \cdot \mathrm{Re}\mu - (\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\mu)) + \mathrm{Re}\lambda \cdot \vec{v}(\mu) + \mathrm{Re}\mu \cdot \vec{v}(\lambda) + \vec{v}(\lambda) \times \vec{v}(\mu) \qquad (3)$$

formula bilan aniqlaniab, bu erda $(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\mu))$ - $\vec{v}(\lambda)$ va $\vec{v}(\mu)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, $\vec{v}(\lambda) \times \vec{v}(\mu)$ – esa $\vec{v}(\lambda)$ va $\vec{v}(\mu)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini ifodalaydi.

Odatda, kvaternionlarni ko‘paytirish mavhum birliklar va skalyar birliklarni ko‘paytirish jadvali yordamida aniqlanadi, so‘ngra distributivlik xossasidan foydalanib (3) formulasi chiqariladi. Kvaternionlarni ko‘paytirishda qo‘shiluvchilarga nisbatan assisotivlik, distributivlik xossasi bajariladi, biroq umumiy holda kommutativlik xossasiga ega emas. Lekin, agar vektor qismlari kollinear bo‘lsa, kvaternionlarni ko‘paytirishda kommutativlik xossasi bajariladi. Umumiy holda kommutativlik xossasi bajarilmaganligi sababli qisqa ko‘paytirish formulalari noto‘g‘ri bo‘lib, ularga asosan haqiqiy va kompleks sonlar maydoni ustida kvadrat tenglamani yechish formulalari kelib chiqadi.

Kvadrat tenglamani yechishni o‘rganishni boshlaymiz.

Qulaylik uchun dastlab

$$x^2 = c \qquad (4)$$

tenglamani qaraylik. Bu erda $c = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ – berilgan kvaternion son, $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ esa izlanayotgan xozircha no’malum kvaternion son.

Kvadratga ko‘tarishda ikkita bir xil kvaternion sonni kopaytmasi shaklida qaraydigan bolsa, u holda (3) formuladan foydalanib (4) tenglamani

$$x_0^2 - |\vec{v}(x)|^2 + 2x_0 \vec{v}(x) = c_0 + \vec{v}(c)$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin bo‘ladi. Bu tenglik

$$\begin{cases} x_0^2 - |\vec{v}(x)|^2 = c_0 \\ 2x_0 \vec{v}(x) = \vec{v}(c) \end{cases} \qquad (5)$$

tengliklar bajarilgandagina o‘rinli bo‘ladi.

Faraz qilaylik $\vec{v}(c) \neq 0$. U holda $x_0 \neq 0$ ekanligidan $\vec{v}(x) = \dfrac{\vec{v}(c)}{2x_0}$ bo’lib

$$x_0^2 - \frac{|\vec{v}(x)|^2}{4x_0^2} = c_0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Xosil bo‘lgan x_0 ga nisbatan bikvadrat tenglamadan

$$\left(x_0^2\right)_{1,2}=\frac{c_0\pm\sqrt{c_0^2+\left|\vec{v}\left(x\right)\right|^2}}{4x_0^2}=\frac{c_0\pm\sqrt{\left|c\right|^2}}{2}=\frac{c_0\pm\left|c\right|}{2}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan esa $x_0^2>0$ ekanligini inobatga oladigan bo'lsak, u holda (4) tenglamaning 2 ta ildizi kelib chiqadi.

$$x=\pm\sqrt{\frac{c_0+\left|c\right|}{2}}\ ,\ \vec{v}\left(x\right)=\frac{\vec{v}\left(c\right)}{2x_0} \qquad (6)$$

yoki

$$x=\pm\left(\sqrt{\frac{c_0+\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}{2}}+\frac{c_1i+c_2j+c_3k}{\sqrt{2\left(c_0+\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}\right)}}\right) \qquad (7)$$

Aytaylik $\vec{v}\left(c\right)=0$. U holda (5) tenglamalar sistemasida $x_0=0$ yoki $\vec{v}\left(x\right)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $\vec{v}\left(x\right)=0$ bo'lsa $x_0^2=c$ ekanligi, ya'ni $c_0\geq 0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lib, $x=x_0=\pm\sqrt{c_0}=\pm\sqrt{c}$ bunda $\vec{v}\left(c\right)=0$ bo'ladi. Agar $c_0<0$ bo'lsa, u holda $\vec{v}\left(x\right)\neq 0$ bo'lib, $x_0=0$, $\left|\vec{v}\left(x\right)\right|=\sqrt{-c_0}$ ya'ni uch o'lchovli fazodagi sferaning barcha nuqtalarini ifodalab, tenglama cheksiz ko'p echimga ega bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. (4) ko'rinishidagi tenglama har doim yechimga ega bo'lib,

1) $c=0$ da $x=0$ ikki karrali ildizga;
2) $\vec{v}\left(c\right)\neq 0$ da (6) yoki (7) formula bilan aniqlanadigan 2 ta ildizga;
3) $\vec{v}\left(c\right)=0, c_0>0$ da $x=\pm\sqrt{c_0}$ bilan aniqlanadiga 2 ta ildizga;
4) $\vec{v}\left(c\right)=0$, $c_0<0$ bo'lganda $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-c_0, c_0<0$, shartni qanoatlantiruvchi uch o'lchovli fazodagi sferaning barcha nuqtalarini ifodalab, tenglama cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

MUXOKAMA (ОБСУЖДЕНИЕ / DISCUSSION)

Kvaternionlarni ko'paytirish mavhum birliklar va skalyar birliklarni ko'paytirish jadvali yordamida aniqlanadi, so'ngra distributivlik xossasidan foydalanib formulasi chiqariladi. Kvaternionlarni ko'paytirishda qo'shiluvchilarga nisbatan assisotivlik, distributivlik xossasi bajariladi, biroq umumiy holda kommutativlik xossasiga ega emas. Lekin, agar vektor qismlari kollinear bo'lsa, kvaternionlarni ko'paytirishda kommutativlik xossasi bajariladi. Umumiy holda kommutativlik xossasi bajarilmaganligi sababli qisqa ko'paytirish formulalari noto'g'ri bo'lib qoladi ya 'ni biror kvarternion sonni kavdratga ko 'tarmoqchi bo'lsak kvarternion son bitta xaqiqiy qismdan va uchta mavhum qismdan iborat shu holni inobatga olib haqiqiy qismi bilan birinchi mavhum qismini va ikkinchi va uchinchi qismni alohida son sifatida qarab yig 'indining kvadrati sifatida qarasak natijaga ega bo'lamiz, biroq haqiqiy qismi bilan ikkinchi mavhum qismini alohida son sifatida qarab yig'indining kvadrati sifatida qarasak natija birinchi holdagi natijaga har doim ham teng bo 'lmaydi uchinchi holda ham shunday natijaga ega bo‘lamiz, ularga asosan haqiqiy va kompleks sonlar maydoni ustida kvadrat tenglamani yechish formulalari kelib chiqadi.

XULOSA (ЗАКЛЙУЧЕНИЕ/ CONCLUSION)

Kvaternion sonining kvadrat ildizi

$$\sqrt{c}=\begin{cases}0, & agar \quad c=0\\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{c_0+|c|}{2}}+\dfrac{\vec{v}(c)}{\sqrt{2\left(c_0+|c|\right)}}\right), & agar \;\; \vec{v}(c)\neq 0\\ \pm\sqrt{c_0}, & agar \;\; \vec{v}(c)=0, c_0>0\\ x_1 i+x_2 j+x_3 k,\left(x_1,x_2,x_3\right): x_1^2+x_2^2+x_3^2=-c_0, & agar \;\; \vec{v}(c)=0, c_0<0\end{cases}$$

formula orqali aniqlanadi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI (ИСПОЛЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES)

1. Гордеев В.Н. Квартернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механики// Киев.Издавательство “Сталь”, 2016.316с.
https://www.researchgate.net/publication/326377622

2. Н. С.Поляков.. Дифференцирование функций квартернионной переменной// Чебишевский сборник 2019, т,20, вып 2,с. 298-310.
DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-298-310

3. Бранец А. В., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела /А.В. Бранец, И.П. Шмыглевский // Москва, Наука, 1973, 320 с.
https://rusneb.ru/catalog/000219_000011

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии /Д.В. Клетеник // Москва, Наука, Физматлит, 1998, 240 с
http://elib.kstu.kz/fulltext/skan/Kletenik