УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Мамажонов Жаҳонгир Деҳқонович
дотцент, Фер.Г.У.
Холматов Зухриддин Зиёвуддин угли
магисрт, Фер.Г.У.

Аннотация. *В этом работе поставлено и исследована краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка вырождающихся на границе области. При достаточных условий найдено в явном виде решение рассматриваемое задачи методом разделения переменных.*

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ЧЕГАРАДА БУЗИЛАДИГАН ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Annotatsiya. *Ушбу ишда иккинчи тартибли аралаш типдаги чегарада бузиладиган тенглама учун чегаравий масалалар ўрганилган. Зарурий шартлар асосида ўрганилаётган масаланинг ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида аниқ кўриниши топилган.*

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION SECOND KIND DEGENERATION IN BOUNDARY DOMAIN

Abstract. *In this article formulated and investigated boundary value problem for the mixed type equation second kind degeneration in boundary domain. At sufficient conditions the solution of investigation problem found in evident form by the method of separate variables.*

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа, краевая задача, методом разделения переменных.*

Kalit so`zlar: *aralash tipdagi tenglama, chegaraviy masala, o‘zgaruvchilarni ajratish usuli.*

Key words: *mixed type equation, boundary value problem, method of separate variables.*

Многие задачи механики, физики, геофизики приводят к решению уравнений в частных производных, которые не входят в известные классы эллиптических, параболических или гиперболических уравнений. Такие уравнения, как правило, стали называть неклассическими уравнениями математической физики.

Теория вырождающихся уравнений является одним из центральных разделов современной теории уравнений с частными производными. Это объясняется, прежде всего, выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обслуживает изучение различных типов вырождающихся уравнений. До настоящего времени задачи для вырождающихся уравнений, в основном, исследованы для модельных уравнений и для уравнений с младшими членами с достаточно гладкими коэффициентами при младших членах.

За последние годы после известных работ О.А.Ладыженский [1] и В.А.Ильина [2] появились многочисленные исследования, посвященные разрешимости методом Фурье смешенных задач для невырождающегося гиперболического и параболического уравнений. Это объясняется тем, что метод Фурье для гиперболического уравнения связана с наименьшими ограничениями на коэффициенты уравнения и границу области.

С 60-х годов метод Фурье систематически применялся при изучении вопроса о разрешимости смешанных задач для вырождающихся линейных и квазилинейных гиперболических и параболических уравнений, позднее и уравнений высших порядков и систем в работах Ферганских математиков Д.Х.Каримов [3,4], К.Б.Байкузиева [5], М.Касимовой [6], Б.С.Каланова [7] и др. А.Ю.Сазонов в работе [8] применил метод Фурье для исследования сингулярных гиперболических и параболических уравнений.

Поэтому исследование краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков со степенным вырождением, остаётся актуальными.

Пусть: $\Omega_1 = \{(x,y); 0 < x < l, 0 < y < T\}$, $\Omega_2 = \{(x,y); 0 < x < l, -T < y < 0\}$, $OA = \{(x,0); 0 < x < l\}$.

В области $\Omega = \Omega_1 \cup OA \cup \Omega_2$ рассмотрим уравнение

$$(x^{\alpha} u_x)_x + \mathrm{sign} y\, u_{yy} = f(x,y), \qquad (1)$$

здесь $f(x,y)$ - заданная функция, а α - заданное число, причём $0 < \alpha < 1$.

Задача *D*. Найти такую функцию $u(x,y)$ которая:

1) непрерывно в $\overline{\Omega}$ вместе с производными, приведёнными в краевых условиях;

2) является регулярным решением уравнения (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) удовлетворяет одной из следующих групп условий:

$$u(x,-T) = u(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le l; \qquad (2)$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad -T \le y \le T; \qquad (3)$$

или

$u(x,T)=u(x,-T)=0$, $\quad 0\le x\le l$; (2[1])

$u_x(0,y)=u_x(l,y)=0$, $\quad -T<y<T$. (3[1])

Из постановки задачи D следует, что на линии изменения типа OA выполняются условия склеивания:

$u(x,+0)=u(x,-0)$, $\quad 0\le x\le l$;

$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)$, $\quad 0<x<l$.

Решение задачи D при $f(x,y)=0$ разыскивается в виде

$u(x,y)=X(x)Y(y)$.

Тогда, относительно $X(x)$ получим уравнение

$$\left(x^{\alpha}X'(x)\right)'+\lambda X(x)=0. \quad (4)$$

Краевые условия (3) и (3[1]) соответственно принимают вид

$$X(0)=X(l)=0, \quad (5)$$

$$X'(0)=X'(l)=0. \quad (5_1)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид [9]

$$X(x)=x^{\frac{1-\alpha}{2}}\left[c_1J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)+c_2J_{-p}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)\right],$$

где $p=(1-\alpha)/(2-\alpha)$, а J_p и J_{-p} - бесселовые функция первого рода.

Из этого следует, что решения уравнения (4), удовлетворяющие условию $X(0)=0$, имеют вид

$$X(x)=c_1x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right). \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что решения уравнения (4), удовлетворяющие условию $X'(0)=0$ являются функции

$$X(x)=c_1x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{-p}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right). \quad (6_1)$$

Теперь удовлетворяя функцию (6) условию $X(l)=0$, имеем

$$J_p\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-\alpha}l^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)=0.$$

Пусть ν_n n-ый положительный корень уравнения

$$J_p(z)=0. \quad (7)$$

Известно, что (в силу $p>-1$) уравнения (7) имеет счётного числа вещественные корны. Принимая во внимание это из полученного уравнения имеем счётное число нулей

$$\nu_n = \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-\alpha} l^{\frac{2-\alpha}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Подставляя это в (6) получим функции

$$X_n(x) = c_{1n} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_p\left(\nu_n \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

которые является нетривиальными решениями в (0,1), удовлетворяющее условиям (4) и (5).

Далее, аналогично подставляя функции (6_1) условию $X'(l) = 0$, нетрудно убедиться, что функции

$$X_n(x) = c_{2n} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{-p}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_n}}{2-\alpha} x^{\frac{2-\alpha}{2}}\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8_1}$$

являются нетривиальными решениями задачи (4) и (5_1), где ν_n n-ый положительный корень уравнения

$$zJ'_{-p}(z) + pJ_{-p}(z) = 0. \tag{7_1}$$

Известно, что если $(\alpha/\beta) + \nu \geq 0$, то уравнение $\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0$ имеет счётное число вещественных корней. Так как у нас $(\alpha/\beta) = p$, $\nu = -p$ то $(\alpha/\beta) + \nu = 0$. Поэтому уравнение (7_1) имеет счётное число вещественных корней.

Теперь решение задачи D ищется в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x), \tag{9}$$

где $X_n(x)$ - функции, определённые равенствами (8) и (8_1).

Подставляя (9) в уравнение (1) и разлагая функцию $f(x, y)$ по функциям (9), имеем

$$\operatorname{sign} y\, Y_n''(y) - \lambda Y_n(y) = f_n(y), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $f_n(y)$ - коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по системы (9).

Решая эти уравнения методом вариации постоянных имеем

$$\begin{cases} Y_n(y) = a_n(T) e^{\sqrt{\lambda_n} y} + b_n(T) e^{-\sqrt{\lambda_n} y} + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \displaystyle\int_0^y f_n(\tau) sh\sqrt{\lambda_n}(y-\tau) d\tau, & y > 0, \\ Y_n(y) = c_n(-T) \cos\sqrt{\lambda_n} y + d_n(-T) \sin\sqrt{\lambda_n} y - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \displaystyle\int_{-T}^y f_n(\tau) \sin\sqrt{\lambda_n}(y-\tau) d\tau, & y < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Удовлетворяя функции (10) условиям склеивание и условие (2), можно показать, что при выполнений условий

$$th\left[\sqrt{\lambda_n} T\right] + tg\left[\sqrt{\lambda_n} T\right] \neq 0, \qquad n \in N,$$

подставленная задача имеет единственное решение, а это решение определяется равенствами

$$Y_n(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_0^T E_{n1}(y,\tau)f_n(\tau)d\tau, & y>0;\\ -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_{-T}^0 E_{n2}(y,\tau)f_n(\tau)d\tau, & y<0,\end{cases}$$

где

$$E_{n1}(y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T+\tau)\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-y)}{M_n(T)}, & -T\le\tau\le 0;\\ K_{n1}(y,\tau), & 0\le\tau\le T,\end{cases}$$

$$E_{n2}(y,\tau)=\begin{cases}K_{n2}(y,\tau), & -T\le\tau\le 0;\\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T+y)\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-\tau)}{M_n(T)}, & 0\le\tau\le T,\end{cases}$$

$$K_{n1}(y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}y+\cos\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}y}{\sin\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}T+\cos\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}T}\text{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-\tau), & y\le\tau\le T;\\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}\tau+\cos\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}\tau}{\sin\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}T+\cos\sqrt{\lambda_n}T\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}T}\text{sh}\sqrt{\lambda_n}(T-y), & 0\le\tau\le y,\end{cases}$$

$$K_{n2}(y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}y\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}T-\cos\sqrt{\lambda_n}y\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}T}{M_n(T)}\sin\sqrt{\lambda_n}(T+\tau), & -T\le\tau\le y;\\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\tau\cdot \text{ch}\sqrt{\lambda_n}T-\cos\sqrt{\lambda_n}\tau\cdot \text{sh}\sqrt{\lambda_n}T}{M_n(T)}\sin\sqrt{\lambda_n}(T+y), & y\le\tau\le 0,\end{cases}$$

$$M_n(T)=\sin\sqrt{\lambda_n}T\cdot ch\sqrt{\lambda_n}T+\cos\sqrt{\lambda_n}T\cdot sh\sqrt{\lambda_n}T.$$

Лемма. Если $M_n(T)\ge\delta_0>0$, при $n=1,2,\ldots$ тогда справедливы оценки

$$|u_n(t)|\le\frac{C}{\lambda_n^2}\|f_n\|_{L_2(-T;T)},\qquad t>0,$$

$$|u_n'(t)|\le C\|f_n\|_{L_2(0;T)},\qquad |u_n''(t)|\le C\|f\|_{C(\overline{\Omega})}+\lambda_n^2C\|f_n\|_{L_2(0;T)},\qquad t>0:$$

$$|u_n(t)|\le\frac{C_1}{\lambda_n^2}\|f_n\|_{L_2(-T;T)},\qquad t<0,$$

$$|u_n'(t)|\le C_1\|f_n\|_{L_2(-T;0)},\qquad |u_n''(t)|\le C_1\|f\|_{C(\overline{\Omega})}+\lambda_n^2C_1\|f_n\|_{L_2(-T;0)},\qquad t<0,$$

где $C,\ C_1$ - положительная постоянная.

Вторая задача исследуется аналогично первой задаче.

ИСПОЛЬЗОВАННОЕ ЛИТЕРАТУРА:

1. Ладыженский О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехиздат. 1953, 270 с.
2. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболических уравнений. – УМН, 1960, т. 15, №2 (92), с. 97-154.

3. Каримов Д.Х., Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области. – Изв.АН УзССР, сер.физ.-мат.наук, 1968, №2,с.27-31.

4. Каримов Д.Х., Каланов Б.С. О приближенным решении смешанной задачи для одного квазилинейного вырождающегося уравнения высшего порядка. – В сб.: Исследования по проблемам физ.-мат.наук. труды ТашГПИ, т.240, - Ташкент, 1978, с.4-10.

5. Байкузиев К. Основные смешанные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными. Изд. «Фан». 1984, 252с.

6. Касимова М. Смешанные задачи для линейного и квазилинейного уравнений четвертого порядка, вырождающихся на границе области. – Автореферат канд.дис. – Ташкент, 1970. -150 с.

7. Калонов Б.С. смешанная задача для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области. – В сб. Тезисы докладов УП научной конференции математиков Узбекистана. – Ташкент, 1970, с.61.

8. Сазонов А.Ю. О методе Фурье для некоторых сингулярных гиперболических уравнений. – ДАН СССР, 1979, т.248, №4, с. 792-796.

9. Смирнов В.И. Курс высший математики. – М.: Гостехиздат, т.2, 1954, 627 с.