IXTISOSLASHGAN MAKTAB VA AKADEMIK LITSEYLARDA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI O'RGANISHGA INNOVATSION YONDASHUV

A.Jamoldinova
Farg'ona davlat universiteti ikkinchi bosqich magistranti
A.Ahlimirzayev
Andijon davlat universiteti matematika kafedrasi professori
D.Xojiyev
Andijon davlat universiteti akademik litseyi o'qituvchisi

Annotatsiya*: Ushbu maqolada ixtisoslashgan maktab va akademik litseylarda matematik analizning amaliy tatbiqlarga boy bo'lgan bo'limlaridan hisoblangan differensial tenglamalar bo'yicha dastlabki tushunchalarni qanday o'rgatish kerakligi bo'yicha fikrlar bayon qilingan.*

Аннотация: *В данной статье рассматривается идеи о том, как преподавать основные понятие дифференциальных уравнений в специализированных школах и академических лицеях из разделов математического анализа, богатых практическими приложениями.*

Abstract: *This article presents ideas on how to teach the basic concepts of differential equations in specialized schools and academic lyceums from sections of mathematical analysis rich in practical applications.*

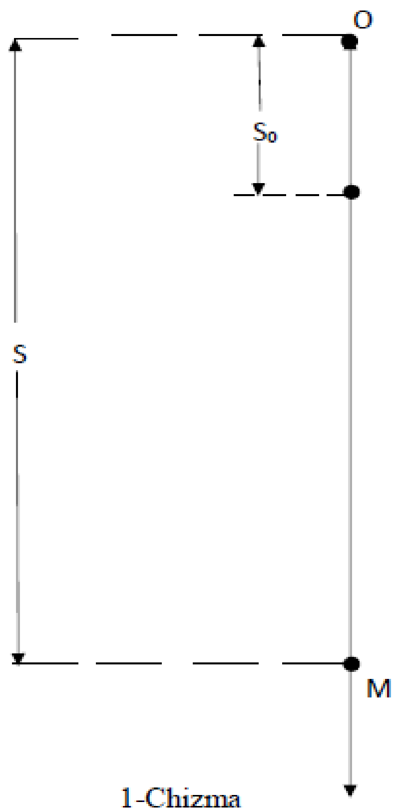
Kalit so'zlar: *hosila, differensial tenglama, umumiy yechim, xususiy yechim, boshlang'ich shart, garmonik tebranishlar.*

Ключевые слова: *производная, дифференциальное уравнение, общее решение, частное решение, начальное условие, гармонические колебания.*

Respublikamiz mustaqil bo'lgandan so'ng barcha sohalarda bo'lgani kabi, ta'lim sohasida ham muhim islohotlar amalga oshirildi. Bu islohotlarning asosiy maqsadi, respublikamizda zamon talablariga mos, raqobatbardosh, malakali mutaxassislar tayyorlashdan iborat. Lekin so'nggi yillarda jahon hamjamiyatida fan-texnika sohasidagi keskin o'zgarishlar respublikamizda ham ta'lim sohasida muhim o'zgarishlar qilish kerakligini ko'rsatdi. Natijada 2020 yilda yangi tahrirdagi "Ta'lim to'g'risida" gi qonun qabul qilindi va Oliy ta'lim muassasalarida esa o'qitishning kredit-modul tizimiga o'tildi. Qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi qonunga asosan barcha ta'lim muassasalarida, jumladan, yangi tashkil qilingan ixtisoslashgan maktab va akademik litseylar matematika kursining mazmuni uning amaliy tatbiqlariga boy bo'lishligini e'tiborga olgan holda yangilandi. Yangilangan mazmunning asosiy maqsadi, o'quvchilarga matematikaning ayrim tushunchalarini kiritishga tabiatshunoslikning bir qator amaliy masalalarini yechish turtki bo'lganligini va kiritilgan bu tushunchalar yordamida yana ko'plab amaliy masalalar yechish mumkinligini uqtirishdan iborat. Mana shunday, tushunchalardan biri differensial tenglama tushunchasidir.

Ma’lumki, tabiatda uchraydigan turli jarayonlar (avtomobil harakati, samaliyotning uchishi, matematik mayatnikning tebranishi, kimyoviy va biologik, iqtisodiy, va hokazo) o‘z harakat qonunlariga ega. Ba’zi jarayonlar bir xil qonun bo‘yicha sodir bo‘lishi mumkin. Bunday xol ularni o‘rganishni osonlashtiradi. Ammo jarayonlarni tavsiflaydigan qonunlarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish har doim ham oson bo‘lavermaydi. Xarakterli miqdorlar va ularning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatni topish tabiatan yengil bo‘ladi. Bunda noma’lum funksiya va uning hosilalari yoki differensiallarini bog‘lovchi munosabat ma’lum bo‘lganda bu funksiyalarni topish kerak bo‘ladi. Quyida shunday munosabatlarga doir ikkita masala bilan tanishamiz.

1. Massasi m bo‘lgan moddiy nuqta og‘irlik kuchi ta’sirida erkin tushmoqda. Nuqtaning harakat qonunini havoning qarshiligini hisobga olmasdan toping.



1-Chizma

Yechish: Sanoq boshi *O* tanlab olingan va pastga yo‘nalgan vertikal o‘q olamiz. Moddiy nuqtaning vaziyati t vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaradigan *OM=S* koordinata bilan aniqlanadi (1-chizma). Nyutonning ikkinchi qonunini *F=ma* ko‘rinishda yozamiz, bu yerda *m*-massa, *a*-nuqtaning tezlanishi, *F*-ta’sir etuvchi kuch. Shartga asosan nuqtaga faqat og‘irlik kuchi ta’sir etadi, demak, *F=P= mg*, bu yerda *g* – og‘irlik kuchi tezlanishi, *a* - tezlanish yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng. Shuning uchun biz quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$ma = mg, \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = mg, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g \text{ yoki } \quad s'' = g.$$

Oxirgi tenglik noma’lum *S=s(t)* funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi qatnashgan differensial tenglamadir. Bu holda bu ikkinchi tartibli hosila argumentning ma’lum funksiyasi bo‘lgani uchun izlanayotgan funksiyani t bo‘yicha ikki marta integrallab topish mumkin:

$$s' = \int gdt + c_1 = gt + c_1, s = \int (gt + c_1)dt = \frac{gt^2}{2} + c_1\, t + c_2$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Oxirgi tenglik izlanayotgan harakat qonunini bildiradi.

2. Non sexida pechkadan olingan nonning harorati 20 minut ichida 100º dan 60º gacha pasayadi. Agar havoning harorati 25º bo‘lsa, sovush boshlangandan qancha vaqt o‘tib nonning harorati 30º gacha pasayadi.

Yechish. Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan nonning sovush tezligi nonning harorati bilan tashqi muhit harorati ayirmasiga proporsional bo‘ladi (bu jarayon bir tekis emas). Haroratlar ayirmasi o‘zgarishi bilan nonning sovush tezligi ham o‘zgaradi. Agar T – nonning harorati, t – tashqi muhitning harorati, k – proporsinallik koeffitsenti, $\frac{dT}{d\tau}$ – nonning sovush tezligi, τ – nonning izlanayotgan sovush vaqti bo‘lsa, u holda quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dT}{d\tau} = k\,(T - t)$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi $T = Ce^{k\tau} + 25$ dan iborat bo‘ladi. Agar biz $\tau = 0$ da T=100º boshlang‘ich shartni e’tiborga olsak, C=75 ni topamiz. Umumiy yechimdagi e^k ni qo‘shimcha shart $\tau = 20$ da T=60º bo‘lishi kerakligi shartidan topamiz, Unga asosan

$$e^k = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}$$

Bundan esa $\tau \approx 71$ minutni topamiz.

Bu yerda keltirilgan masalalarni yechish jarayonida biz differensial tenglama tushunchasiga keldik. Bundan tashqari bu yerda umumiy yechim, xususiy yechim, boshlang‘ich shart, differensial tenglamaning tartiblari haqida ham gapirdik. Ammo biz hali ular haqida tushunchalar bermadik. O‘quvchilar differensial tenglama bo‘yicha mukammal bilimlarga ega bo‘lishlari uchun dastlab asosiy tushunchalar bayon qilinishi kerak. So‘ngra eng sodda differensial tenglamalarni o‘rganishga kirishish mumkin.

Differensial tenglamalarning eng soddasi $y' = f(x)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday ko‘rinishdagi tenglamalarni yechishda hosilani hisoblash qoidalaridan foydalanish mumkin. Ular:

1) Agar $\varphi(x) = c\varphi_1(x)$ bo‘lsa, u holda $y = cy_1$, bu yerda $y_1' = \varphi_1(x)$;
2) Agar $\varphi(x) = -\frac{v\prime(x)}{v^2(x)}$ bo‘lsa, u holda $y = \frac{1}{v(x)}$;
3) Agar $\varphi(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$ bo‘lsa, u holda $y = \frac{u(x)}{v(x)}$;

4) Agar $\varphi(x) = u(x) + v(x)$ bo‘lsa, u holda $y = y_1(x) + y_2(x)$, bu yerda $y_1'(x) = u(x)$ va $y_2'(x) = v(x)$;

5) Agar $\varphi(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ bo‘lsa, u holda $y = u(x) \cdot v(x)$;

6) Agar $\varphi(x) = v'[u(x)]u'(x)$ bo‘lsa, u holda $y = v[u(x)]$;

7) Agar $\varphi(x) = v(ax + b)$ bo‘lsa, u holda $y = \frac{1}{a} y_1(ax + b)$, bu yerda $y_1'(x) = v(x)$;

8) Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ lar $y' = \varphi(x)$ tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $(c_1 + c_2 = 1)$ ham $y' = \varphi(x)$ tenglamaning yechimi bo‘ladi. Aniqmas integrallar mavzusidagi boshlang‘ich funksiyalar jadvalidan o‘rin olgan $y' = x^k$, $y' = e^x$, $y' = sinx$, $y' = xcosx$, $y' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{cos^2 x}$ va hokazolar ham $y' = f(x)$ ko‘rinishdagi eng sodda differensial tenglamalarga misol bo‘la oladi. O‘quvchilar bunday ko‘rinishdagi eng sodda differensial tenglamalarni puxta o‘zlashtirganlaridan so‘ng amaliyotning yana bir qator masalalarini yechish jarayonida hosil bo‘ladigan quyidagi ko‘rinishdagi tenglamalarni o‘rganishga o‘tish mumkin:

$f''(t) = -f(t)$ $(y'' = -y)$

Oxirgi tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘lishiga ishonch hosil qilish mumkin:

$$y = A(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$f''(t) = -f(t)$ ko‘rinishdagi tenglamalar bilan o‘quvchilar fizika kursida “Garmonik tebranishlar” mavzusida tanishganlar. Bunday differensial tenglamalarni o‘rganish jarayonida o‘quvchilar matematika bilan fizika fani orasidagi o‘zaro bog‘liqlikni tushunib yetadilar xamda ularda ikkinchi tartibli differensial tenglama va uning yechimi haqidagi bilimlar shakllanadi.

O‘quvchilar “Garmonik tebranishlar differensial tenglamasi” mavzusini puxta o‘zlashtirishlari uchun o‘qituvchi darsni suxbat ko‘rinishida osongina tashkil qilishi ham mumkin. Quyida uni keltiramiz:

Doskaga: $y'' + k^2 y = 0$ tenglama yoziladi $k \neq 0$.

O‘qituvchi: Yozilgan differensial tenglama qanday tuzilgan?

O‘quvchi: Izlanayotgan funksiya, uning ikkinchi tartibli hosilasi va o‘zgarmas son.

O‘qituvchi: Agar berilgan differensial tenglamani $y'' = -ky$ ko‘rinishda yozsak, u holda $y = f(x)$ funksiya qanday jarayonni ifodalaydi?

O‘quvchi: $y = f(x)$ funksiya – tezlanish vaqt o‘tishi bilan bu funksiyaning qiymatiga proporsional o‘zgarishini, ammo tezlanish harakat yo‘nalishiga teskari bo‘lishini anglatadi.

O‘qituvchi: Bunday hodisalar haqida kim nima deya oladi?

O‘quvchi: Bunday hodisalarni fizika kursidagi mayatnikni erkin tebranishlarida (bunda faqat havoning qarshiligi hisobga olinmaydi) uchratganmiz.

O‘qituvchi: Shuning uchun ham yuqoridagi differensial tenglama garmonik tebranishlar differensial tenglamasi deyiladi. Doskaga

$$y = Asin(ax + \varphi)$$

funksiya yoziladi. (Bu yerda A va φ ixtiyoriy oʻzgarmaslar. A – tebranishlar amplitudasi, φ – tebranishning dastlabki holati, a – tebranishlar chastotasi). Bu funksiya garmonik tebranishlar differensial tenglamasining umumiy yechimidan iborat. Bu fikrni toʻgʻriligini tekshirib koʻringlar.

Oʻquvchi: $y = Asin(ax+\varphi)$ funksiyadan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni olamiz:

$$y' = [A\, sinx(ax+\varphi)]' = A\cos(ax+\varphi)\,(ax+\varphi)' = Aa\cos(ax+\varphi);$$

$$y'' = [Aa\cos(ax+\varphi)]' = -Aasin(ax+\varphi)(ax+\varphi)' = -Aa^2\sin(ax+\varphi).$$

Endi y' va y'' larning ifodalarini berilgan tenglamaga qoʻyamiz:

$$-Aa^2\sin(ax+\varphi) + Aa^2\sin(ax+\varphi) = 0,\ \ 0 = 0.$$

Oʻqituvchi: Demak, $y = Asin(ax+\varphi)$ funksiya garmonik tebranishlar differensial tenglamasining yechimi ekan. Quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalardan qaysilari garmonik tebranishlar differensial tenglamasi ekanligini aniqlang.

1. $y'' - ky = 0,$	5. $y'' - 3y = 0,$
2. $y'' + ky' - 2 = 0,$	6. $y'' - 4y' + 1 = 0,$
3. $y'' + 14y = 8y,$	7. $y'' - 8y' = 0,$
4. $y'' + 4y = 0,$	8. $y'' + 16y = 0.$

Oʻquvchilar: Bu tenglamalardan 3,4 va 8 lar garmonik tebranishlar differensial tenglamasidir.

Oʻqituvchi: $y_1 = sinx$ va $y_2 = cosx$ lar $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi boʻla oladimi?

Oʻquvchilar: 1) $y = sinx$ ning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: ${y_1}' = \cos x$, ${y_1}'' = -\sin x$. Endi y va y'' larning ifodasini berilgan tenglamaga qoʻyamiz: $-sinx + sinx = 0$, demak, $y_1 = sinx$ tenglamaning yechimi ekan.

2) $y_2 = \cos x$ ning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: ${y_2}' = -\sin x$, ${y_2}'' = -\cos x$. Endi y_2 va ${y_2}''$ larning ifodasini berilgan tenglamalarga qoʻyamiz: $-cosx + cosx = 0$, demak, $y_2 = \cos x$ tenglamaning yechimi ekan.

Oʻqituvchi: Huddi shunday, $y_1 = sin2x$ va $y_2 = cos2x$ lar ham garmonik tebranishlar differensial tenglamasi $y'' + 4y = 0$ ning yechimlari ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Garmonik tebranishlar differensial tenglamasining umumiy yechimi tushunchasi oʻrganilgandan soʻng uning berilgan boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish bilan shugʻullanish mumkin:

1. $y'' + 16y = 0$ tenglamaning $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$ boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: Dastlab, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz: Uning koʻrinishi $y = Asin(4x+\varphi)$ dan iborat boʻladi. y' ni topamiz:

$$y' = Acos(4x+\varphi)\cdot 4 = 4Acos(4x+\varphi)$$

Endi boshlangʻich shartlardan foydalanib A va φ larni topamiz:

$$\begin{cases} Asin\varphi = 1 \\ 4Acos\varphi = 1 \end{cases}; \qquad \frac{1}{4}tg\varphi = 1, \quad tg\varphi = 4, \qquad \varphi = arctg4$$

A ni topish uchun sistemaning har ikkala tenglamasini kvadratga ko'tarib hadma-had qo'shamiz:

$$A^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = 1 + \frac{1}{16}, \qquad A^2 = \frac{17}{16}, \qquad A = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

A va φ larning topilgan qiymatlarini o'rniga qo'yib

$y = \frac{\sqrt{17}}{4}\sin(4x + arctg4)$ xususiy yechimni hosil qilamiz.

Bundan so'ng o'quvchilar bilan quyidagi tenglamalarni yechishga o'tish mumkin:

1. $y'' + 9y = 0$ ni $y(0) = 2,\quad y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni;
2. $y'' + y = 0$ ni $y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni;
3. $y'' + 3y = 0$ ni $y(0) = 2,\quad y'(0) = 2$ boshlang'ich shartlarni

qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari topilsin.

O'quvchilar yuqoridagi va ularga o'xshash misollar yordamida garmonik tebranishlar differensial tenglamasini puxta o'zlashtirganlaridan so'ng ular bilan ko'rsatkichli o'sish va ko'rsatkichli kamayishning differensial tenglamalarini o'rganish mumkin. Bu tenglamalar

$$f'(x) = kf(x)$$

ko'rinishda bo'lib, bunday tenglamaga fizika, biologiya, ijtimoiy fanlarning ko'pgina masalalarini yechish jarayonida duch kelinadi. Bunday tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = Ce^{kx}$$

$f'(x) = kf(x)$ tenglamaning mazmuni shundan iboratki, funksiyaning x nuqtadagi o'zgarish tezligi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga proporsionaldir. Bunday ko'rinishdagi tenglamaga radioaktiv yemirilish haqidagi, aholi sonini o'sishi haqidagi, jismning qizishi va sovushi kabi masalalarni yechish jarayonida duch kelinadi.

Shunday qilib yuqorida biz garmonik tebranishlar differensial tenglamasi deb ataluvchi quyidagi ikkinchi tartibli eng sodda

$$f''(x) = kf(x)$$

differensial tenglama hamda ko'rsatkichli o'sish va ko'rsatkichli kamayish differensial tenglamasi deb ataluvchi birinchi

$$f'(x) = kf(x)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar bilan tanishdik.

Bu tenglamalar birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning eng sodda ko'rinishlari bo'lib, ularni puxta o'zlashtirish differensial tenglamalarning keyingi sinflarini o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti 2019-yil 9 iyuldagi "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi PQ-4387 son qarori.
2. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti SH.M.Mirziyoyevning Oliy majlisga murojaatnomasi. T.: Yangi O'zbekiston gazetasi. 2020 yil 24 yanvar.
3. M.S.Saloxitdinov, G'.N.Nasritdinov. Oddiy differensial tenglamalar. T.: "O'zbekiston", 1994.-383 b.
4. R.S.Guter, A.R.Yanpolskiy. Differensial tenglamalar. T.: "O'qituvchi", 1978. – 323 b.
5. A.N.Kolmogorov va boshqalar. Algebra va analiz asoslari. T.: "O'qituvchi", 1984. – 333 b.