DIFFERENSIAL XISOBNING BA’ZI BIR GEOMETRIK TADBIQLARINI O‘RGANISH

A.Axlimirzayev
Andijon davlat universiteti matematika kafedrasi professori,
F.Jamolova
Andijon davlat universiteti matematika kafedrasi tayanch doktoranti
A.Toxirov
Andijon davlat universiteti matematika yo‘nalishi magistranti
Sh.Ahmedov
Andijon mashinasozlik institute doktoranti

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematik analizning muhim bo‘limlaridan hisoblangan differensial hisob bo‘limidagi hosila tushunchasining ba’zi bir geometrik tatbiqlari yetarlicha misollar yordamida bayon qilingan.*

Аннотация: *В этой статье с помощью достаточных примеров описаны некоторые геометрические приложения понятия производной в разделе дифференциального исчисления.*

Abstract: *In this article, some geometrical applications of the concept of derivative in the differential calculus section are described with the help of sufficient examples.*

Kalit so‘zlar: *differensial hisob, hosila, urinma, normal, egrilik, egrilik radiusi, egrilik markazi, urinma osti, normal osti.*

Ключевые слова: *дифференциальное исчисление, производная, касательная, нормаль, кривизна, радиус кривизны, центр кривизны, подкасательная, поднормал.*

Ma’lumki bugungi kunda fan va texnikaning jadal suratlar bilan rivojlanib borishi Respublikamiz ta’lim muasssalarida, jumladan, oliy ta’lim muassasalarida matematika va matematika fanlarini o‘rganishni yanada rivojlantirishni taqozo etadi. Bu masalaning dolzarbligi Respublikamiz Prezidenti tomonidan 2019-yil 9-iyulda qabul qilingan qarorda xam o‘z aksini topgan [1]. Qo‘yilgan bu vazifani bajarish uchun bugungi kunda Respublikamizdagi ilmiy tadqiqot instituti olimlari va oliy ta’lim muassasalari professor - o‘qituvchilari ilmiy tadqiqot ishlarini olib bormoqdalar.

Respublikamiz oliy ta’lim muasssalarida matematik ta’limni yanada rivojlantirishda quyidagi uchta yo‘nalishni e’tiborga olish kerak:

1. Oliy ta’lim muassasalarida o‘qitadigan matematika kursining mazmunini rivojlangan mamlakatlar tajribasini tanqidiy o‘rgangan xolda yangilash.
2. Aniqlangan mazmunni talabalarga zamonaviy pedagogik va axborot kommunikatsion texnalogiyalardan foydalangan xolda yetkazish.
3. O‘qitish jarayonini talaba kelgusida egallaydigan mutaxassisligini e’tiborga olgan xolda amaliy-kasbiy mazmundagi masalalardan foydalangan xolda tashkil qilish.

Bu vazifalarni amalga oshirishda oliy ta'lim muassasalarida o'qitilayotgan matematik analiz fanining differensial xisob bo'limi katta imkoniyatga ega. Differensial xisob matematik analizning eng asosiy, eng kuchli va samarali usullaridan biri bo'lib xisoblanadi. Matematik analizning bu bo'limi nisbatan yosh bo'lib, uning dastlabki kurtaklari XVII - asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII - asrda buyuk ingliz olimi Nyuton va mashxur nemis matematigi Leybnits tomonidan unga asos solingan xamda turli amaliy masalalarni yechish uchun qo'llanilgan.

Differensial xisob-matematik analizning, asosan, funksiya hosilasi va differensiali tushunchalari bilan bog'liq bo'lgan bo'limi. Differensial xisobda hosilalarni xisoblash qoidalari (differensiallash qoidalari) va hosilaning funksiyaning xossalarini tekshirishga tadbiqlari o'rganiladi.

Differensial xisobning asosiy tushunchalari-hosila va differensial tabiatshunoslik va matematikaning bir xil toifadagi limitlarni xisoblashga olib kelgan juda ko'plab masalalarni qarash natijasida paydo bo'ldi. Ulardan dastlabkilari notekis xarakat tezligini aniqlashga doir fizik masala va egri chiziqqa urinma o'tkazishga doir geometrik masalalar. Keyinchalik hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar sinfi ancha kengligiga ishonch xosil qilingan.

Hosila-funksiya xususiyatlari (xossalari) ni tekshirish uchun kuchli va qulay vositadir. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini, funksiyaning ekstremumlarini, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik oraliqlarini, funksiya grafigining bukilish nuqtalari va asimptotalarini topishda xam hosilaga murojat qilinadi. Hosilaning tadbiqlari ichida uning geometrik tadbiqlari aloxida o'ringa ega. Ular egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzish, urinma va normal ostilarini topish, egri chiziqning egriligini va egrilik radiusini topish kabi masalalardir. Bunday masalalarning amaliy axamiyati beqiyosdir. Shuning uchun xam biz ushbu maqolada hosilaning geometrik tadbiqlariga to'xtalamiz.

1.Urinma va normal tenglamalari. Urinma osti va normal osti uzunliklari. Tenglamasi $y = f(x)$ bo'lgan egri chiziqning $M(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma ordinata o'qiga parallel emas deb faraz qilamiz. M nuqtadan o'tuvchi burchak koeffitsienti K bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_1 = k(x - x_1)$ ko'rinishda bo'ladi. Urinma uchun $K = f'(x_1)$ bo'ladi. Shuning uchun izlanayotgan urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

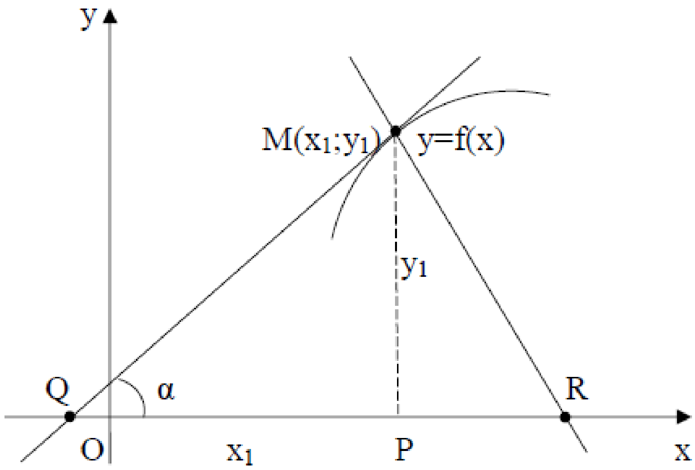
$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_0)$$

Egri chiziqqa uning biror nuqtasiga o'tkazilgan urinma bilan bir qatorda normalni xam qarashga to'g'ri keladi.

Ta'rif. Egri chiziqqa berilgan nuqtaga o'tkazilgan normal deb, berilgan nuqtadan o'tuvchi va shu nuqtadagi urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Demak, normalning ta'rifidan, uning burchak koeffitsienti K_n urinmaning burchak koeffitsienti K_u bilan quyidagicha bog'langan(1-chizma):

$$K_n = -\frac{1}{k_u} \quad yoki \quad K_n = -\frac{1}{f'(x_1)}$$



1-chizma

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x_1, y_1)$ nuqtadagi normal tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

Quyida bunga misol keltiramiz:

1-misol. $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ egri chiziqqa uning $M(3;2)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalari tuzilsin.

Yechish: $y' = (x^3 - 3x^2 - x + 5)' = 3x^2 - 6x - 1$ bo‘lgani uchun urinmaning burchak koeffitsienti $k = y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 1 = 3 \cdot 9 - 18 - -1 = 8$ ga teng. Demak, urinma tenglamasi $y - y_1 = k(x - x_1)$ ga asosan $y - 2 = 8(x - 3)$ yoki $y = 8x - 22$ bo‘ladi. Normal tenglamasi esa $y - 2 = -\frac{1}{8}(x - 3)$, $8y - 16 = -x + 3$ yoki $y = -\frac{1}{8}x + \frac{19}{8}$ dan iborat bo‘ladi. Urinmaning urinish nuqtasi bilan Ox o‘q orasidagi QM kesmaning T uzunligi urinmaning uzunligi deyiladi. Bu kesmaning Ox o‘qidagi proeksiyasi QP urinma osti deyiladi. Uni S_T bilan belgilanadi. MR kesmaning N uzunligi normal uzunligi deyiladi. RM kesmaning Ox o‘qidagi RP proyeksiyasi normal osti deyiladi va uni S_N bilan belgilanadi $y = f(x)$ egri chiziq bilan $M(x_1, y_1)$ nuqta uchun T, S_T, N, S_N larni topamiz. Chizmadagi QMP uchburchakdan

$QP = |y_1 ctg\alpha| = \left|\frac{y_1}{tg\alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|$ bo‘lgani uchun $S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|$

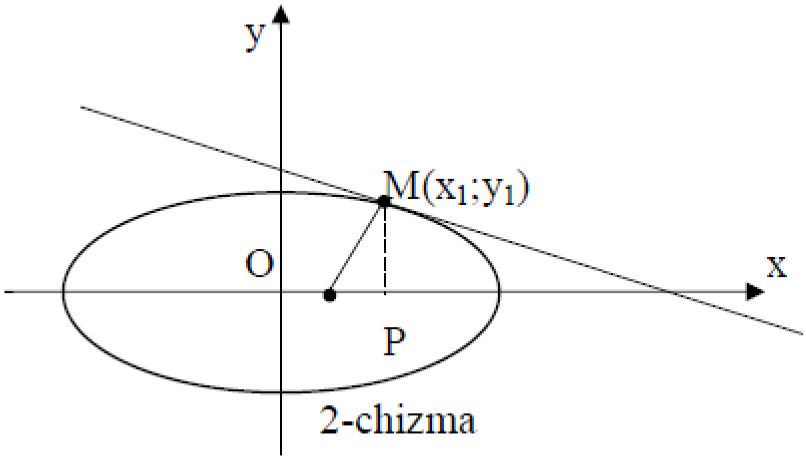
$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2 + 1}\right|, \quad PR = |y_1 tg\alpha| = |y_1 y_1'|$$

Shuning uchun $S_N = |y_1 y_1'|$, $N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = \left|y_1\sqrt{1 + y_1'^2}\right|$

2-misol. $x = acost,\ y = bsint$ ellips uchun $t = \frac{\pi}{4}$ bo‘lgan $M(x_1, y_1)$ nuqtadagi urinma va normal tenglamalari, urinma va urinma osti uzunliklari, normal va normal osti uzunliklari topilsin.

Yechish: Ellipsning tenglamasidan

$$\frac{dx}{dt} = -asint; \quad \frac{dy}{dt} = bcost; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}ctgt; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$



2-chizma

Urinish nuqtasi M ning koordinatalarini topamiz:

$$x_1 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Urinmaning tenglamasi:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{yoki} \quad bx + ay - ab\sqrt{2} = 0$$

Normal tenglamsi:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{yoki} \quad (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0$$

Urinma osti va normal osti uzunliklari:

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}$$

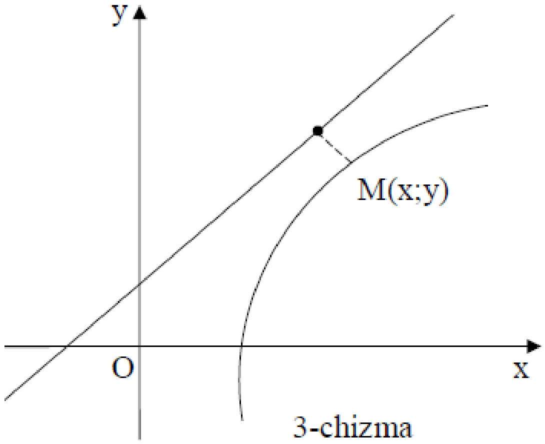
Urinma va normal uzunliklari:

$$T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2},$$

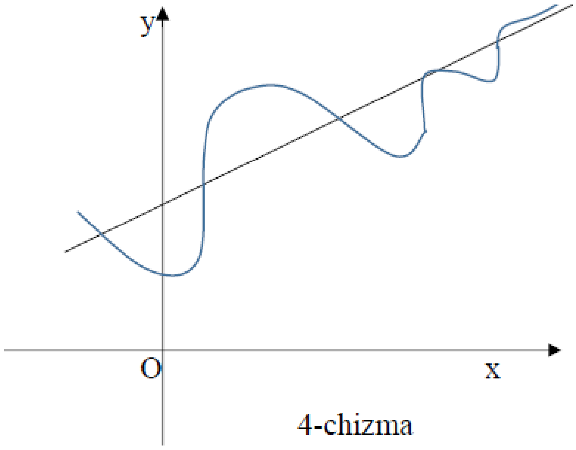
$$N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right| = \frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Amalda, ko‘pincha $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan $y = f(x)$ egri chiziqning shaklini tekshirishga to‘g‘ri keladi, buning uchun esa, o‘zgaruvchi nuqta absissasi yoki ordinatasi, yoki xar ikkalasi bir vaqtda (absolyut qiymat bo‘yicha) cheksiz o‘sganda tegishli funksiyaning o‘zgarish xarakterini tekshirishga to‘g‘ri keladi. Bunda tekshirilayotgan egri chiziq, uning o‘zgaruvchi nuqtasi cheksiz uzoqlashganda, birorta to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadigan xol muxim xususiy xoldir.

Ta’rif. Agar egri chiziqning o‘zgaruvchi M nuqtasi cheksiz uzoqlashganda uning biror A to‘g‘ri chiziqdan masofasi δ nolga intilsa, u xolda $x = a$ to‘g‘ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi (3,4 chizmalar).



3-chizma



4-chizma

Asimptotalar vertikal yoki og‘ma bo‘lishi mumkin. Asimptotaning ta’rifidan, ya’ni $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ bo‘lsa, u xolda $x = a$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi bo‘ladi.

Masalan, $f(x) = \frac{2}{x-5}$ egri chiziq $x = 5$ vertikal asimptotaga ega. $f(x) = tgx$ egri chiziq esa, $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, , $x = \pm\frac{5\pi}{2}$, … asimptotalarga ega. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ esa $x = 0$ vertikal asimptotaga ega.

Agar $y = f(x)$ funksiya og‘ma asimptotaga ega bo‘lsa, u xolda uning tenglamasi $y = kx + b$ ko‘rinishida bo‘ladi. Bundagi k va b lar quyidagicha aniqlanadi:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx]$$

3-misol. $y = \frac{x^2+x-1}{x}$ egri chiziqning asimptotalari topilsin.

Yechish: 1) Vertikal asimptotalarini topamiz:

$x \to -0$ bo‘lganda $y \to +\infty$ va $x \to +0$ bo‘lganda $y \to -\infty$. Demak, $x = 0$ to‘g‘ri chiziq berilgan egri chiziqning vertikal asimptotasi ekan.

2) Og‘ma asimptotani topamiz:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2, \quad b = 2.$$

Demak, $y = kx + b = x + 2$.

4-masala. $y = e^{-x^2}$ egri chiziqning burilish nuqtalari hamda qavariqlik va botiqlik oraliqlari topilsin.

Yechish: 1) Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = (e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2};$$

$$y'' = (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar x ning barcha qiymatlarida mavjud. x ning $y'' = 0$ bo‘ladigan qiymatlarini topamiz:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0, \qquad 2x^2 - 1 = 0, \qquad x^2 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Topilgan qiymatlarni tekshiramiz:

$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda $y'' > 0$ va $x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda $y'' < 0$. Demak, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tishda y'' o‘z ishorasini o‘zgartiradi. Demak, absissasi $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan nuqta burilish nuqta ekan. Uning koordinatalarini topamiz. Buning uchun x ning qiymatini berilgan funksiyaga qo‘yamiz:

$y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Demak, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ birinchi burilish nuqta bo‘ladi.

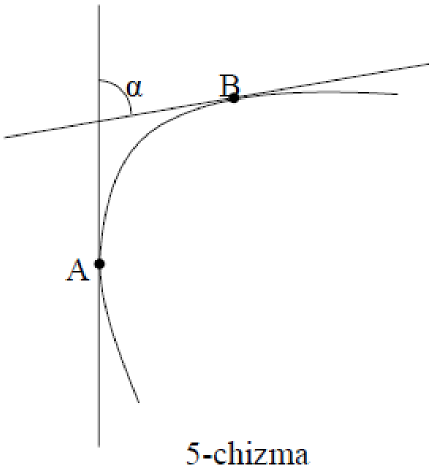
Endi $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtani tekshiramiz: $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda $y'' < 0$ va $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda $y'' > 0$. Demak, absissasi $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan nuqta burilish nuqta bo‘ladi. Uning koordinatalarini topamiz. Buning uchun x ning qiymatini berilgan funksiyaga qo‘yamiz:

$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Demak, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ikkinchi burilish nuqtadir.

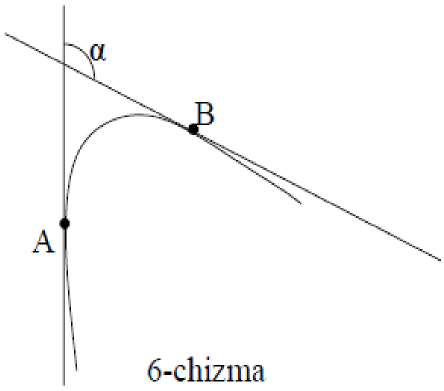
4) Yuqoridagilardan $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda egri chiziq botiq, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ bo‘lganda egri chiziq qavariq va $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ bo‘lganda egri chiziq botiq ekanligini aniqlaymiz.

Ma’lumki, matematikada to‘g‘ri chiziq bilan birga egri chiziqlar va ularning xossalari ham o‘rganiladi. Egri chiziqni shaklini xarakterlovchi elementlardan biri uning egriligi, ya’ni egilish darajasidir. Berilgan chiziqning berilgan A nuqtasi yaqinida egrilik darajasini xarakterlash uchun egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egriligi degan tushuncha kiritiladi. Bunda dastlab yoyning o‘rtacha egriligi degan tushuncha kiritiladi.

Bizga berilgan egri chiziq o‘zini-o‘zi kesmaydi va har bir nuqtasida aniq urinmaga ega deb faraz qilamiz. Egri chiziqqa uning ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalarida urinmalar o‘tkazamiz va shu urinmalar orasida xosil bo‘lgan burchakni – aniqroq qilib aytganda urinmaning A nuqtadan B nuqtaga o‘tishdagi aylanish burchagini α bilan belgilaymiz(5-chizma).



5-chizma



6-chizma

Bu burchak AB yoyning qo‘shnilik burchagi deyiladi. Uzunliklari bir xil bo‘lgan ikkita yoyning qaysi birida qo‘shnilik burchagi katta bo‘lsa, o‘sha yoy ko‘proq egilgan bo‘ladi (5-6-chizmalar).

Ikkinchi tomondan har xil uzunlikdagi yoylarni faqat tegishli qo‘shnilik burchaklariga qarab ularni egrilanish darajasiga baxo berib bo‘lmaydi. Bundan, egri chiziqning egrilik darajasining to‘la xarakteristikasi qo‘shnilik burchagining tegishli yoy uzunligiga nisbatidan iborat bo‘lishi kelib chiqadi.

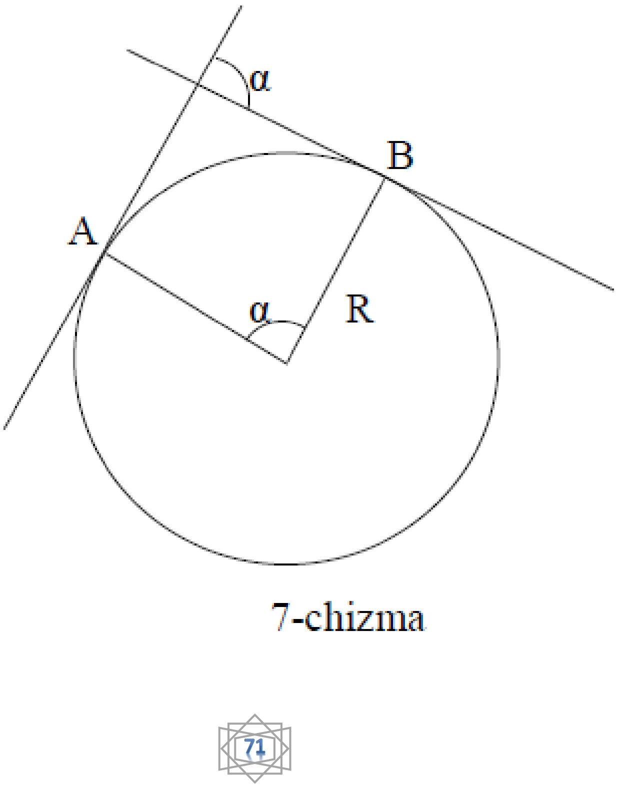
Ta’rif. $\breve{AB}$ yoyning o‘rtacha egriligi $K_{o‘rt}$ deb, tegishli qo‘shnilik burchagi α ning yoy uzunligiga nisbatiga aytiladi:

$$K_{o‘rt} = \frac{\alpha}{\breve{AB}}$$

Ta’rif. Egri chiziqning A nuqtasidagi egriligi K_A deb, $\breve{AB}$ yoy o‘rtacha egriligining yoy uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$K_A = \lim_{B\to A} K_{o‘rt} = \lim_{AB\to 0} \frac{\alpha}{\breve{AB}}$$

5) Radiusi R bo‘lgan aylana uchun: 1) markaziy burchak α ga mos $\breve{AB}$ yoyning o‘rtacha egriligi aniqlansin (7-chizma); 2) A nuqtadagi egriligi aniqlansin.



7-chizma

Yechish: 1) Ravshanki, $\breve{AB}$ yoyning qo‘shnilik burchagi α ga teng, yoyning uzunligi esa αR ga teng. Demak,

$K_{o\prime rt} = \frac{\alpha}{\alpha R}$ yoki $K_{o\prime rt} = \frac{1}{R}$

2) A nuqtadagi egrilik:

$$K = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\alpha R} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

Shunday qilib, radiusi R bo‘lgan aylana yoyning o‘rtacha egriligi yoyning uzunligiga va holatiga bog‘liq emas, hamma yoylar uchun uning qiymati $\frac{1}{R}$ ga teng. Aylananing har bir nuqtasidagi egriligi ham nuqtani tanlashga bog‘liq emas va $\frac{1}{R}$ ga teng.

Amaliyotning bir qator masalalarini yechishda $y = f(x)$ tenglama berilgan egri chiziqning egriligini, egrilik markazini, egrilik radiusini hisoblashga to‘g‘ri keladi.

$y = f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning egriligi K quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Chiziqning berilgan M nuqtasidagi egriligi K ga teskari bo‘lgan R miqdor shu chiziqning berilgan nuqtasidagi egrilik radiusi deb ataladi va u quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

$y = f(x)$ egri chiziqdagi $M(x, y)$ nuqtaga tegishli egrilik markazi koordinatalari α va β quyidagi formuladan topiladi:

$$\alpha = x - \frac{y'\left(1+{y'}^2\right)}{y''}, \qquad \beta = y + \frac{1+{y'}^2}{y''}.$$

6) $y^2 = 2px$ tenglama bilan berilgan parabolaning 1) $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ nuqtasidagi egriligi; 2) egrilik radiusi; 3) egrilik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish: $y^2 = 2px$ dan $y = \sqrt{2px}$ ni, undan esa y' va y'' larni topamiz:

$$y' = \left(\sqrt{2px}\right)' = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \qquad y'' = \left(\frac{p}{\sqrt{2px}}\right)' = -\frac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bularni K egrilikni hisoblash formulasiga qo‘yamiz:

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1+\frac{p^2}{2px}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad K\Big|_{\substack{x=\frac{p}{2}\\ y=p}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

Egrilik radiusini $R = \frac{1}{K}$ dan topamiz. Unga asosan $R = 2\sqrt{2p}$ bo‘ladi.

Egrilik markazining koordinatalarini topish uchun y' va y'' larning qiymatlarini egrilik markazini koordinatalarini topish formulasiga qo‘yamiz:

$x=\frac{p}{2}$ bo‘lganda $\alpha=\frac{5p}{2}$ va $\beta=-p$ bo‘ladi. Demak, egrilik markazining koordinatalari $O\left(\frac{5p}{2};-p\right)$ dan iborat bo‘ladi.

Shunday qilib biz, ushbu maqolada differensial hisob(hosila)ning ba’zi geometrik tatbiqlarini yetarlicha misollar yordamida bayon qildik. Bular va ularga o‘xshash misollar yordamida talabalarda matematik analizning muhim tushunchalaridan hisoblangan hosilaning tatbiqlari bo‘yicha bilimlari yanada takomillashadi hamda talabalarda differensial hisobning amaliy tatbiqlari haqidagi bilimlari mustaxkamlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. N.S.Piskunov. Differensial va integral hisob, 1-tom. T.:”O‘qituvchi”, 1972 y, 504 b.
2. I.A.Kaplan. Prakticheskiye zanyatiya po visshey matematike. Chast 2, “Xarkov”. “Vita shkola”, 1973 y, 367-c.
3. N.P.Rasulov, I.I.Safarov, P.T.Muhitdinov, Oliy matematika, T.: “O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti devoni ishlar boshqarmasi bosmoxonasi”, 2012 y, 512 b.
4. Yosh matematik qomusiy lug‘ati. T.: Qomuslar bosh tahririyati, 1991, 480-b.