УДК.517.956.6.

ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Нишонова Ш.Т
Муйдинжонова Б.А
Узбекистан, Ферганский государственный университет

Аннотация: *В области, состоящей из получетверти круга и характеристического треугольника, для одного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами, сформулированы аналоги задач Трикоми. Доказана однозначная разрешимость одного аналога задачи Трикоми. При этом выявлены достаточные условия на заданные функции, которые обеспечивают существование решения изучаемой задачи.*

TRIKOMI PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION IN A SPECIAL DOMAIN

Nishonova.Sh.T
Muydinjonova B.A.

In the domain, which consists of half quarter circle characteristic triangle, for a mixed type equation with two singular coefficients, analogues of Trikomi problems are formulated. Unique solvability of one analogue of Trikomi problem is proved. At this sufficient condition to given function. Which existence of the solution of investigated problem is provide.

ВВЕДЕНИЕ.

С середины двадцатого века интенсивно исследуются, так называемые, уравнения смешанного типа, которые имеют многочисленные приложения в газодинамике, гидродинамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхности, математической биологии и других разделов науки. Вначале в теории уравнений смешанного типа, в основном, исследовались классические краевые задачи, т.е. задачи, в которых на полной границе области рассмотрения или в её некоторой части дано значение искомой функции или её производной (определенного направления) или их некоторой комбинации.

Одной из таких задач является задача Трикоми и ее аналогов. В работах [3-10] для дифференциального уравнения с двумя сингулярными коэффициентами второго порядка изучались различные краевые задачи в области, где уравнение имеет смешанный тип. В данной статье, в отличие от предыдущих работ, изменены граничные условия в области гиперболичности уравнения. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

I. Постановка задачи. Пусть Ω- конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная дугой $\sigma_0=\left\{(x,y): x^2+y^2=1,\ 0<y<x\right\}$ и отрезками $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{DA}$ прямых $y=x$, $y=-x$, $y=x-1$ соответственно, где $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$, $D(1/2,-1/2)$. Части области Ω при $y>0$, $y<0$, $y=0$ соответственно обозначим через Ω_0, Ω_1, OA.

В области Ω рассмотрим задачу Трикоми в следующей формулировке.

Задача $T^{(2)}$. Найти регулярное в Ω решение $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ уравнения

$$u_{xx}+signy\cdot u_{yy}+(2\beta/x)u_x+(2\beta/|y|)u_y=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y),\ 0<x<1; \qquad (2)$$

$$u(x,y)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_0; \qquad (3)$$

$$u(x,y)\big|_{\overline{OB}}=\psi(y),\quad 0\le y\le 1/\sqrt{2}; \qquad (4)$$

$$u(x,y)\big|_{\overline{AD}}=f_1(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \qquad (5)$$

где $\varphi(x,y),\psi(y),f_1(x)$ - заданные функции, а $\beta=const\in R$, причем $0<\beta<1/2$; $\varphi(x,y)=y^{\alpha}\varphi_0(x,y)$, $\varphi_0(x,y)\in C\left(\overline{\sigma_0}\right)$, $\alpha>1$; $\psi(y)=y^{\delta}\psi_0(y)$, $\psi_0(y)\in C\left[0,1/\sqrt{2}\right]$, $\delta>2$; $f_1(x)=(1-x)^{\gamma}f_0(x)$, $f_0(x)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\gamma>2$.

II. **Исследование задачи** $T^{(2)}$. Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $T^{(2)}$ и

$$u(x,-0)=\tau(x),\quad \tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1) \qquad (6)$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\nu(x),\quad \nu(x)\in C^2(0,1) \qquad (7)$$

а $\nu(x)$- может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to1$. Тогда функция $u(x,y)$ в области Ω_1, как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (6,7), представима в виде [1]

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau\left(\zeta^{1/2}\right)\left[z(1-z)\right]^{\beta-1}dz-$$

$$-\gamma_2(-xy)^{1-2\beta}\int_0^1\zeta^{\beta-1/2}\nu\left(\zeta^{1/2}\right)\left[z(1-z)\right]^{-\beta}dz, \qquad (8)$$

где $\zeta=(x+y)^2-4xyz$, $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=\Gamma(1-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$;

$\Gamma(z)$-гамма функция Эйлера [2].

Удовлетворяя функцию (8) условию (5), имеем

$$\gamma_1\Gamma(\beta)(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}\left[(1-x)^{\beta-1}\tau\left(x^{1/2}\right)\right]-$$

$$-\gamma_2 4^{2\beta-1}\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}\left[x^{\beta-\frac{1}{2}}(1-x)^{-1/2}\nu\left(x^{1/2}\right)\right]=f_1\left[\left(\sqrt{x}+1\right)/2\right],\qquad 0\le x\le 1,$$

(9)

где D_{xb}^{α} - оператор дробного интегродифференцирования [3]:

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_x^b(t-x)^{-\alpha-1}\varphi(t)dt \quad при \quad \alpha<0;\\ \varphi(x), \quad при \quad \alpha=0\\ (-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}D_{xb}^{\alpha-n}\varphi(x), \quad при \quad \alpha>0\end{cases}$$

Умножая обе части равенства (9) на $(x-1)^{2\beta-1}\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$ и применяя оператор D_{xb}^{β} к полученному равенству, с учетом равенств [3]

$$D_{xb}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x),$$

$$D_{xb}^{\alpha}(1-x)^{2\alpha-1}D_{xb}^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)=(b-x)^{\alpha-1}D_{xb}^{2\alpha-1}f(x),$$

Получим

$$\tau\left(x^{1/2}\right)=\gamma_3 D_{x1}^{2\beta-1}\left[(x)^{\beta-1/2}\nu\left(x^{1/2}\right)\right]+$$

$$+\gamma_4 D_{x1}^{\beta}\left[(1-x)^{2\beta-1}f_1\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)\right](1-x)^{1-\beta},\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\qquad (10)$$

где $\gamma_3=4^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\gamma_4$, $\gamma_4=\Gamma(\beta)\big/\left[\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)\right]$.

(10) есть основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OA, получаемое из того условия, что решение задачи $T^{(2)}$ должно удовлетворить условию (5).

Докажем единственность решения задачи $T^{(2)}$. Пусть $u(x,y)$- решение задачи $T^{(2)}$ при $\varphi(x,y)\equiv\psi(y)\equiv f(x)\equiv 0$. Тогда в области Ω_0 справедливо тождество (1). Умножая обе части этого тождества на $(xy)^{2\beta}u(x,y)$ и интегрируя полученное тождество в области Ω_0, получим

$$\iint\limits_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy=\iint\limits_{\Omega_0}\left\{\left[(xy)^{2\beta}uu_x\right]_x+\left[(xy)^{2\beta}uu_y\right]_y\right\}dxdy.$$

Отсюда, пользуясь формулой Грина – Остроградского и учитывая равенства (2) и $u|_{\overline{\sigma_0}}(x,y)=u|_{\overline{OB}}(x,y)=0$, получим

$$\iint\limits_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\int\limits_0^1 x^{2\beta}\tau(x)\nu(x)dx=0. \qquad (11)$$

В интеграле $l=\int\limits_0^1 x^{2\beta}\tau(x)\nu(x)dx$ выполняем замену $x=z^{1/2}$ и подставляем функцию $\tau\left(z^{1/2}\right)$ из (10). Затем, принимая во внимание $f_1(x)\equiv 0$ и формулу [2]

$$(z-t)^{-2\beta}=\left[\Gamma(2\beta)\cos\beta\pi\right]^{-1}\int\limits_0^\infty \xi^{2\beta-1}\cos\left[(z-t)\xi\right]d\xi,$$

получим

$$l=\frac{1}{\pi}\gamma_3\sin\beta\pi\int\limits_0^\infty \xi^{2\beta-1}d\xi\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^x z^{\beta-1/2}\nu\left(z^{1/2}\right)t^{\beta-1/2}\nu\left(t^{1/2}\right)\cos\left[(z-t)\xi\right]d\xi \quad (12)$$

В силу равенства

$$\int\limits_0^z g(z)g(t)\left[\cos z\xi\cos t\xi+\sin z\xi\sin t\xi\right]dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\left(\int\limits_0^z g(t)\cos t\xi dt\right)^2+\left(\int\limits_0^z g(t)\sin t\xi dt\right)^2\right]$$

и неравенства $\gamma_3>0$, $\sin\beta\pi>0$, из равенства (12) следует, что $l\geq 0$.

Если учесть это, то из (12) следует, что $u(x,y)\equiv const$ в Ω_0. Так как $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}_0\right)$ и $u(x,y)|_{\overline{\sigma_0}}=0$, то $u(x,y)\equiv 0$ $\overline{\Omega}_0$, откуда следует единственность решения задачи $T^{(2)}$.

Для доказательства существования решения задачи $T^{(2)}$ в области Ω_0, воспользуемся формулой

$$u(x,y)=-\int\limits_0^1 \xi^{2\beta}\nu(\xi)G_N(\xi,0;x,y)d\xi+$$

$$+\sqrt{2}\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}\eta^{4\beta}\psi(\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N(\eta,\eta;x,y)d\eta+\int\limits_{\sigma_0}(\xi\eta)^{2\beta}\varphi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N(\xi,\eta;x,y)ds,$$

(13)

которая дает решение задачи N для уравнения (1) в области Ω_0 с краевыми условиями (3), (4) и $\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y)=\nu(x)$, $0<x<1$, здесь n - внешняя нормаль, s-длина дуги кривой σ_0, отсчитываемая от точки A;

$G_N(\xi,\eta;x,y)=q_1(\xi,\eta;x,y)-\left(r_0^2\right)^{-2\beta}q_1\left(\xi,\eta;\tilde{x},\tilde{y}\right)-q_1(\eta,\xi;x,y)+\left(r_0^2\right)^{-2\beta}q_1\left(\eta,\xi;\tilde{x},\tilde{y}\right)$,

$q_1(\xi,\eta;x,y)=k_1(r_1r_2)^{-2\beta}F(\beta,\beta,2\beta;1-\omega)$, $\quad r_0^2=x^2+y^2$, $\tilde{x}=x/r_0^2$, $\tilde{y}=y/r_0^2$,

$$r_j^2=\left[x+(-1)^j\,\xi\right]^2+\left[y-(-1)^j\,\eta\right]^2,\qquad j=\overline{1,2};\qquad k_1=4^{2\beta-1}\Gamma^2(\beta)/\left[\pi\Gamma(2\beta)\right],$$

$1-\omega=16\xi\eta xy/\left(r_1^2r_2^2\right)$; $F(a,b,c;x)$- гипергеометрическая функция Гаусса [2].

Полагая $y=0$ в формуле (13), получим второе основноефункциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OA, получаемое из того условия,что решение задачи $T^{(2)}$должно удовлетворить условиям (3),(4):

$$\tau(x)=-\int_0^1\xi^{2\beta}\nu(\xi)G_N(\xi,0;x,0)d\xi+\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\eta^{4\beta}\psi(\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N(\eta,\eta;x,0)d\eta+$$

$$+\int_{\sigma_0}(\xi\eta)^{2\beta}\varphi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N(\xi,\eta;x,0)ds,\quad 0\le x\le 1. \qquad (14)$$

Исключая функцию $\tau\left(x^{1/2}\right)$ из (10) и (14), получим

$$\gamma_5D_{x1}^{2\beta-1}\left[x^{\beta-1/2}\nu\left(x^{1/2}\right)\right]+\frac{k_1}{2}\Gamma(1-2\beta)D_{0x}^{2\beta-1}\left[x^{\beta-1/2}\nu(x^{1/2})\right]+$$

$$+\frac{k_1}{2}\int_0^1t^{\beta-1/2}\nu\left(t^{1/2}\right)\left[(1+tx)^{-2\beta}-(t+x)^{-2\beta}-|1-tx|^{-2\beta}\right]dt=\Phi(x),\ 0<x<1, \qquad (15)$$

где $\gamma_5=\gamma_3+\gamma_6$, $\gamma_6=k_1\Gamma(1-2\beta)/2$,

$$\Phi(x)=\int_{\sigma_0}(\xi\eta)^{2\beta}\varphi(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N\left(\xi,\eta;x^{1/2},0\right)ds+$$

$$+\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\eta^{4\beta}\psi(\eta)\frac{\partial}{\partial n}G_N\left(\eta,\eta;x^{1/2},0\right)d\eta$$

$$+\gamma_4(1-x)^{1-\beta}\frac{d}{dx}\int_x^1(1-t)^{2\beta-1}f_1\left(\sqrt{t}+2/2\right)(t-x)^{-2\beta}dt.$$

Применяя оператор $D_{x1}^{1-2\beta}$ к обеим частям равенства (14) и учитывая [3]

$$D_{x1}^{1-2\beta}D_{x1}^{2\beta-1}f(x)=f(x),$$

$$D_{x1}^{1-2\beta}D_{0x}^{2\beta-1}f(x)=\cos(1-2\beta)\pi f(x)-\frac{\sin(1-2\beta)\pi}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)}{t-x}dt,$$

$$D_{x1}^{1-2\beta}\left\{\int_0^1f(t)\left[(1\mp tx)^{-2\beta}\right]dt\right\}=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1\left(\frac{1\mp t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)}{1\mp tx}dt,\quad 0<x<1$$

$$D_{x1}^{1-2\beta}\left[\int_0^1f(t)(t+x)^{-2\beta}dt\right]=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_0^1\left(\frac{1+t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{f(t)}{t+x}dt,\qquad 0<x<1$$

имеем

$$\rho(x)-\frac{\gamma_7}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1}{1-tx}\right]\rho(t)dt-$$

$$-\frac{\gamma_7}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1+t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{t+x}-\frac{1}{1+tx}\right]\rho(t)\,dt=\gamma_8\Phi_1(x), \qquad (16)$$

где $\gamma_7=\cos\beta\pi/(1+\sin\beta\pi)$,

$$\Phi_1(x)=2\Gamma(\beta+1/2)\left[(1+\sin\beta\pi)\Gamma(-\beta+1/2)\right]^{-1}D_{x1}^{1-2\beta}\Phi(x).$$

В силу условий, наложенных на заданные функции, $\Phi_1(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right)$

.

Выполнив замену $\xi=2t^2/(1+t^4)$, $y=2x^2/(1+x^4)$, из (16) получим сингулярное интегральное уравнение второго рода нормального типа:

$$\rho_1(y)-\frac{\gamma_7}{\pi}\int_0^1\frac{\rho_1(\xi)}{\xi-y}d\xi=\Phi_2(y), \quad 0<y<1, \qquad (17)$$

где

$$\rho_1(y)=(1+x^4)(1-x)^{-2\beta}(1+x)^{-1}\rho(x),$$

$$\Phi_2(y)=\Phi_1(x)-\int_0^1 M(y,\xi)\xi^{-1/2}\rho_1(\xi)\,d\xi,$$

$$M(y,\xi)=(\gamma_7/2\pi)\frac{(1+x^4)(1+x^2)^{-1}(1+t^4)}{(1+tx)(t+x)(1+\sqrt{1-\xi^2})^{1/2}}\left[\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2\beta}-1\right].$$

Этот интеграл является сингулярным интегральным уравнением, которое подстановкой сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го типа.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Уринов А.К., Каримов К.Т. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2008, № 2. С.15-19.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа,1985.

3. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова.. Краевая задача для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами// "Актуальные проблемы механики горного машиноведения, развития науки и интеграции ВУЗов". 2009.№1. 17.04, С.60-62

4. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова. Задачи Трикоми и Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа в одной специальной области// Естественные и технические науки. 2010. №2(46). С.54-60.

5. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами// Международ. Российско-Абхазский симпозиум. Нальчик-Эльбрус 2009. 2009. С.220-222

6. Ш.Т.Нишонова, Д.Мухторов. Нелокальная краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения сводимого к гипергеометрическому уравнению // Ўзбекистонда фанлараро инновациялар ва илмий тадқиқотлар. 2022, №12.19.11. 1175-1185 бет.

7. SH.T.Nishonova, B.A, Muydinjonova. О единственности решения задача Трикоми для уравнения смешанного типа в одной специальной области// Algebra va analizning dolzarb masalalari mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari tuplami. -2022.18-19-noyabr.2-qism, 2022-yil. 150-152b.

8. Ш.Т. Нишонова. Собственные значения и собственные функции задач Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа в одной специальной области// Международ. Российско-Абхазский симпозиум. Нальчик-Эльбрус 2009. С.108-109.

9. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова. Boundary value problem for mixed type equation with singular coefficients// ABSTRACTS.Of The Third Congress Of The World Mathematical Society Of Turkic Countries.Almaty,June30-July. 2009.30.06. №1. С.302

10. А.К.Уринов, Ш.Т.Нишонова. Краевые задачи для одного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами// Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми: Труды конф. 2009.18.09. №1. С.127-128