UDK 517.926

GIPERGEOMETRIK TENGLAMA UCHUN DIRIXLENING SPEKTRAL MASALASI

K.T.Karimov
N.A.Oripova
Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston
karimovk80@mail.ru

Annotatsiya: Ushbu maqolada spektral parametr qatnashgan buziladigan oddiy differensial tenglama uchun Dirixlening spektral masalasi tadqiq qilingan. Qo'yilgan masalaning xos qiymatlari va shu xos qiymatlarga mos bo'lgan xos funksiyalari topilgan.

Kalit so'zlar. Gaussning gipergeometrik tenglamasi, Gaussning gipergeometrik funksiyasi, Gamma-funksiya, Poxgammer belgisi, xos qiymat, xos funksiya.

Masala. λ ning shunday qiymatlari topilsinki, bu qiymatlarda

$$x(1-x)y''+\left[1/2+\beta-(1+2\beta)x\right]y'+\lambda y=0,\ 0<x<1 \qquad (1)$$

differensial tenglamaning (bu yerda $0<\beta<1/2$)

$$y(0)=0, \qquad y(1)=0 \qquad (2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin.

Bu masalaga o'xshash masalalarni [1], [2], [3], [4], [5] ishlarda uchratish mumkin.

Endi masalani yechishga o'tamiz. (1) – Gaussning gipergeometrik tenglamasi [6] bo'lib, uning $x=0$ nuqta atrofida aniqlangan umumiy yechimi

$$y(x)=c_1F\left(\beta+\omega,\beta-\omega,\beta+\frac{1}{2};x\right)+c_2x^{(1/2)-\beta}F\left(\frac{1}{2}+\omega,\frac{1}{2}-\omega,\frac{3}{2}-\beta;x\right) \qquad (3)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\omega=\sqrt{\beta^2+\lambda}$, $F(a,b,c;x)$ – Gaussning gipergeometrik funksiyasi:

$$F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\cdot n!}x^n,$$

$(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$–Poxgammer belgisi, $\Gamma(a)$–Eylerning gamma-funksiyasi [7].

(3) funksiyani (2) shartlarga bo'ysundiramiz. $y(0)=0$ chegaraviy shartdan $c_1+c_2\cdot 0=0$ tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $c_1=0$, c_2 esa ixtiyoriy o'zgarmas son ekanligi kelib chiqadi. Buni e'tiborga olib, (3) funksiyani $y(1)=0$ chegaraviy shartga

bo‘ysundirib, $c_2 F\left(\frac{1}{2}+\omega, \frac{1}{2}-\omega, \frac{3}{2}-\beta; 1\right)=0$ tenglikka kelamiz. Biz trivial bo‘lmagan yechim qidirayotganimiz uchun $c_2 \neq 0$ deb hisoblaymiz. U holda

$$F\left(\frac{1}{2}+\omega, \frac{1}{2}-\omega, \frac{3}{2}-\beta; 1\right)=0$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni, ma’lum bo’lgan $F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ formuladan foydalanib, quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}{\Gamma(1-\beta-\omega)\Gamma(1-\beta+\omega)}=0. \qquad (4)$$

(4) ifodaning surat va maxrajini $\Gamma(\beta+\omega)$ ga ko’paytirib va Gamma funksiya uchun o‘rinli bo‘lgan $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ formulani e’tiborga olsak $A\cdot\sin[\pi(\beta+\omega)]=0$ tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda

$$A(\omega)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma(\beta+\omega)}{\pi\Gamma(1-\beta+\omega)}.$$

$\sin[\pi(\beta+\omega)]=0$ trigonometrik tenglama yechimlarining formulasidan, $\beta+\omega>0$ ekanini e’tiborga olib, $\beta+\omega=n$, $n\in N$, ya’ni $\beta+\sqrt{\beta^2+\lambda}=n$, $n\in N$ tenglikni topamiz. Bundan kelib chiqadiki, $\lambda_n=n^2-2n\beta$, $n\in N$ lar masalaning xos qiymatlaridan iboratdir. Bevosita hisoblab ko‘rsatish mumkinki, $A(\omega_n)$ ifoda noldan farqli chekli songa teng. (3) formulada $c_1=0$, $c_2=a_n$ deb, hamda topilgan xos qiymatlar va $\omega=\sqrt{\beta^2+\lambda}$ tenglikni e’tiborga olib,

$$y_n(x)=a_n x^{(1/2)-\beta} F\left(\frac{1}{2}-\beta+n, \frac{1}{2}+\beta-n, \frac{3}{2}-\beta; x\right),\ n\in N$$

xos funksiyalarga ega bo‘lamiz, bu yerda $a_n\neq 0$ – ixtiyoriy son.

ADABIYOTLAR:

1. Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами//Узбекский математический журнал. 2017. №1,-С.96-105.

2. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами//Вестник Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека. Серия: Математика, Механика, Физика, Информатика. 2017. 2/1,-С.195-206.

3. Каримов К.Т. Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами//Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2017, выпуск 2(18), 7–19.

4. Каримов К.Т. Краевые задачи для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом в цилиндрической области//Бюллетень Института математики, 2020, №4, стр. 75-97.

5. Urinov A.K., Karimov K.T. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain//Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 9, pp. 1891–1902.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука. – 1965.

7. O‘rinov A.Q. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. Farg‘ona. –2012.