МАРТИНГАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ ВЕРШИННОГО ПРОЦЕССА ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

Хамдамов И.М.
Маматов Х.М.
Университет общественной безопасности Республики Узбекистан

Экстремальные значения выборки имеют многочисленные применения в различных отраслях науки и техники, экономики, актуарной математики, теории надежности (особенно при оценке надежности работы промышленных и сельскохозяйственных объектов), медицине и так далее. Выпуклая оболочка является наиболее полным многомерным аналогом экстремальных наблюдений выборки, в частности, если носитель равномерной выборки является выпуклой областью, то выпуклая оболочка для оценивания носителя распределения является состоятельной, асимптотически несмещенной оценкой и достаточной статистикой. С другой стороны вершины выпуклой оболочки важный роль имеет в определение оптимального портфеля инвестиции. Так как при линейной ограничение на издержки обеспечивающие минимальной расход портфелю определяется одном из вершин выпуклой оболочки порождённой выборкой.

Настоящая работа посвящена исследованию свойствам мартингальности функционалов вершинного процесса от выпуклых оболочек, порожденных неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри параболы и является продольжением работы [1-3].

Положим

$$R_n = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{2b_n} \le y \right\}. \qquad (1)$$

Введем следующую меру

$$\Lambda_n(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{b_n}\,L(b_n)} \iint\limits_A \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(y - \dfrac{x^2}{2b_n} \right)^{\beta} L\left(\dfrac{b_n}{y - \dfrac{x^2}{2b_n}} \right) \right] dxdy, & \text{при } A \subset R_n; \\ 0, & \text{при } A \not\subset R_n, \end{cases}$$

(2)

где b_n – наименьший корень уравнения

$$n x^{-\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} L(x) = 1, \qquad (3)$$

$L(x)$ – медленно меняющаяся в смысле Карамата функция, которая представима в виде

$$L(u)=\exp\left\{\int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\},\quad \varepsilon(t)\to 0,\quad t\to\infty. \qquad (4)$$

Пусть $\Pi_n(R_n)$ – неоднородный пуассоновский точечный процесс (н.п.т.п.) с интенсивностью $\Lambda_n(\cdot)$, и пусть (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), …, (X_k,Y_k), … – реализации н.п.т.п. $\Pi_n(R_n)$. Через C_n обозначим выпуклые оболочки, порожденные этими случайными точками.

Вершинным процессом $W_n(a)=\left(X_n(a),Y_n(a)\right)$ для любого $a\in R$ назовем такую точку$\left(X_k,Y_k\right)$ реализации н.п.т.п. $\Pi_n(R_n)$, для которой Y_k-aX_k принимает минимальное значение.

Из определения нетрудно понять, что $W_n(a)$ образует скачкообразный нестационарный марковский процесс. В приводимой ниже теореме приведены свойства $W_n(a)$, соответствующие различным ситуациям.

Обозначим через $N_n(0,a)$ число скачков скачкообразного процесса $W_n(c)$ в пределах $0\le c\le a$,

Введем обозначения.

$$M^{(k)}\left(t;R^2\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L\left(b_n\right)}\int_r^{\sqrt{2b_ns}}(u-r)^k\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(s-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(b_n\Big/\left(s-\frac{u^2}{2b_n}\right)\right)\right\}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L\left(b_n\right)}\int_0^{\sqrt{2b_ns}-r}u^k\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(s-\frac{(u+r)^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(b_n\Big/\left(s-\frac{(u+r)^2}{2b_n}\right)\right)\right\}du, \qquad (5)$$

где $t=(r,s)$.

Теорема. Если выполнены условия (1)-(4) в силах обозначение (5) процессы

$$N(0,a)-\int_0^a M^{(1)}\left(T_n(b);R^2\right)db\ ,\ N^2(0,a)-\int_0^a\left[2N(0,b)+1\right]M^{(1)}\left(T_n(b);R^2\right)db$$

и $$N^3(0,a)-\int_0^a\left[3N^2(0,b)+3N(0,b)+1\right]M^{(1)}\left(T_n(b);R^2\right)db$$

образует мартингал относительно σ–алгебры $\Im_a=\sigma\left\{T_n(c):0\le c\le a\right\}$, где

$$R_n(a)=X_n(a)-ab_n,\qquad S_n(a),=Y_n(a)-\frac{X_n^2(a)}{2b_n}+\frac{R_n^2(a)}{2b_n},\quad T_n(a)=\left(R_n(a),S_n(a)\right).$$

Доказательство. Имеем

$$E\left\{N(0,a+h)-N(0,a)/\Im_a\right\}=E\left\{N(0,a+h)-N(0,a)/T(a)\right\}$$

Отсюда в силу стационарности процесса $T(a)$ (см. [2])

$$E\left\{N(0,a+h)-N(0,a)/T(a)=(r,s)\right\}=E\left\{N(0,h)/T(0)=(r,s)\right\}:$$

: $E\xi_{A^{(1)}(a,b,x,y)}$: $\Lambda\left(A^{(1)}(a,b,x,y)\right)$ (см. рис.1), где $\xi_{A(a,b,x,y)}$ –число точек реализации н.о.п.т.п. $\Pi(\cdot)$ в области $A^{(1)}(a,b,x,y)$ и

$$A(a,b,x,y)=A^{(0)}(a,b,x,y)\cup A^{(1)}(a,b,x,y).$$

Далее, по определению $\Lambda(\cdot)$ меры (см. (5)) легко показать, что при малых $h=b-a$

$$\Lambda\left(A^{(1)}(a,b,x,y)\right)=o(h).$$

Действительно. Пусть $s_0=y_0-ax_0+\frac{a^2b_n}{2}$, $s_1=y_0-bx_0+\frac{b^2b_n}{2}$, $b=a+h$.

Тогда функция $f(u)=(a+h)(u-x_0)+y_0-\frac{u^2}{2b_n}$ монотонно убивающаяся для достаточно малое $h>0$ при $u\ge ab_n+\sqrt{2b_ns_0}$.

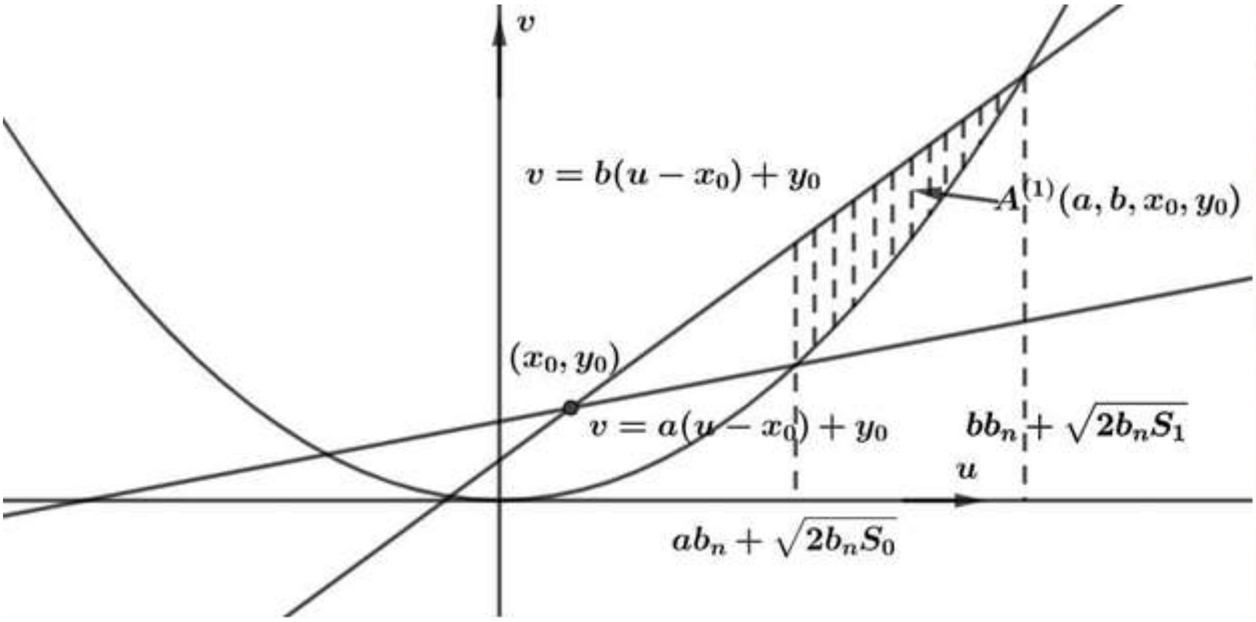

Рис.1. Иллюстрация вершины $W_n(a)$ и $A^{(1)}(a,b;x,y)$.

Так как при $h<\sqrt{\frac{2s_0}{b_n}}$ производная $f^{'}(u)=a+h-\frac{u}{b_n}<0$ для всех $u\ge ab_n+\sqrt{2b_ns_0}$.

Далее

$$bb_n+\sqrt{2b_ns_1}-ab_n-\sqrt{2b_ns_0}=(a+h)b_n+\sqrt{2b_n\left[y_0-(a+h)x_0+\frac{(a+h)^2b_n}{2}\right]}-$$

$$-ab_n-\sqrt{2b_ns_0}=ab_n+hb_n+\sqrt{2b_n\left[s_0-hx_0+hb_n+\frac{h^2b_n}{2}\right]}-ab_n-\sqrt{2b_ns_0}=$$

$$=hb_n+\sqrt{2b_ns_0}\sqrt{1-\frac{hx_0-hb_n-\dfrac{h^2b_n}{2}}{s_0}}-\sqrt{2b_ns_0}=hb_n+\sqrt{2b_ns_0}\left(1-\frac{hx_0-hb_n-\dfrac{h^2b_n}{2}}{2s_0}+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{hx_0-hb_n-\dfrac{h^2b_n}{2}}{2s_0}\right)^2\right)-\sqrt{2b_ns_0}=O(h).\qquad \text{(см. рис. 1)}$$

Отсюда, учитывая $b=a+h$ имеем

$$\Lambda\left(A^{(1)}(a,b,x_0,y_0)\right)=\frac{\displaystyle\int\limits_{ab_n+\sqrt{2b_ns_0}}^{bb_n+\sqrt{2b_ns_1}}du\int\limits_{\frac{u^2}{2b_n}}^{b(u-x_0)+y_0}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(v-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(\frac{b_n}{v-\dfrac{u^2}{2b_n}}\right)\right\}dv}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)}\le$$

$$\le\frac{C_1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)}\int\limits_{ab_n+\sqrt{2b_ns_0}}^{bb_n+\sqrt{2b_ns_1}}\left(b(u-x_0)+y_0-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(\frac{b_n}{b(u-x_0)+y_0-\dfrac{u^2}{2b_n}}\right)du.\qquad(6)$$

Так же при $u=ab_n+\sqrt{2b_ns_0}$

$$(a+h)(u-x_0)+y_0-\frac{u^2}{2b_n}=(a+h)(ab_n+\sqrt{2b_ns_0}-x_0)+y_0-\frac{\left(ab_n+\sqrt{2b_ns_0}\right)^2}{2b_n}=$$

$$=a^2b_n+a\sqrt{2b_ns_0}-ax_0+y_0+h\left(ab_n+\sqrt{2b_ns_0}-x_0\right)-\frac{a^2b_n^2+2ab_n\sqrt{2b_ns_0}+2b_ns_0}{2b_n}=$$

$$=h\left(ab_n+\sqrt{2b_ns_0}-x_0\right).$$

Наконец для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\Lambda\left(A^{(1)}(a,b,x_0,y_0)\right)\le C_2h^{\beta-\varepsilon}\int\limits_{ab_n+\sqrt{2b_ns_0}}^{bb_n+\sqrt{2b_ns_1}}du=O\left(h^{\beta+1-\varepsilon}\right).$$

Из последнего, по определению $\Lambda(\cdot)$ меры (см. (2)) при малых h имеем

$$\Lambda\left(A(a,b,x_0,y_0)\right)=\Lambda\left(A^0(a,b,x_0,y_0)\right)+o(h)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)}\int\limits_{r}^{\sqrt{2b_ns}}\left(\int\limits_{s}^{h(u-r)+s}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(v-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(b_n\Big/\left(v-\frac{u^2}{2b_n}\right)\right)\right\}dv\right)du+o(h)=$$

$$=\frac{h}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)}\int_r^{\sqrt{2b_n s}}(u-r)\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(s-\frac{u^2}{2b_n}\right)^{\beta}L\left(b_n\Big/\left(s-\frac{u^2}{2b_n}\right)\right)\right\}du+o(h)=$$

$$=hM^{(1)}\left(t;R^2\right)+o(h). \qquad (7)$$

В силу (6) и (7) получаем доказательство первого утверждения теоремы. Переходим к доказательству второго утверждения теоремы.

Имеем

$$E\left\{N^2(0,a+h)-N^2(0,a)/T(a)=(r,s)\right\}=$$

$$=E\left\{\left(N(a,a+h)\right)\left(N(a,a+h)+2N(0,a)\right)/T(a)=(r,s)\right\}=$$

$$=E\left\{\left(N(0,a+h)\right)^2/T(a)=(r,s)\right\}+2N(0,a)E\left\{N(a,a+h)/T(a)=(r,s)\right\}=$$

$$=E\left\{N(a+h)-N(a)/T(a)=(r,s)\right\}+o(h)+2N(a)E\left\{N(a+h)-\right.$$

$$\left.-N(0,a)/T(a)=(r,s)\right\}=\left(2N(0,a)+1\right)E\left\{N(0,a+h)/T(a)=(r,s)\right\}+o(h)=$$

$$=\left(2N(0,a)+1\right)hM^{(1)}\left(t,R^2\right)+o(h).$$

Второе утверждение теорема доказана. Аналогично доказывается третье утверждение.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Groeneboom P., Limit theorems for convex hulle//Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327-368.

2. Khamdamov I.M., On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk//Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2020, 13(3), pp.275–284.

3. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M., On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process//Statist. Probab. Lett. , V. 169, 2021, 7P.