УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

К.Т.Каримов
М.Р.Муродова
Ферганский государственный университет

Аннотация: *В работе рассмотрено трехмерное уравнение теплопроводности и это уравнение отражено на сферических координатах. Применено метод разделения переменных к этому уравнению и получено два дифференциальных уравнения, которого одной из них является уравнение с оператором Бесселя. Найдены общее уравнения этих уравнений, т.е. найдены общее решения трехмерное уравнение теплопроводности.*

Ключевые слова: $j-$*функции Бесселя, функция Бесселя первого рода, уравнения теплопроводности*.

Уравнения с оператором Бесселя $B_\gamma = \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{\gamma}{t}\dfrac{d}{t}, \gamma > 0$ появляется в различных разделах математической физики, связанных с задачами со сферической симметрией. Как правило, эти задачи возникают в сферически симметричных областях, таких как задача, о малых колебаниях газа в шаре или об изменении теплового потока внутри твердой сферы и многих др. Для примера рассмотрим хорошо известное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial g}{\partial t} = a^2 \Delta g,\ g = g(x,y,z), \qquad (1)$$

в трехмерном евклидовом пространстве R^3 точек с координатами (x,y,z). Как уже отмечено, в некоторых случаях решение оказывается удобным искать в сферических координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta-$угол между вектором t и осью z, а $\varphi-$угол между вектором t и осью x.

Переходя к этим координатам, получим, что уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left[r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\right]. \qquad (2)$$

Здесь радиальная составляющая оператора Лапласа оказывается оператором Бесселя B_γ с индексом $\gamma = 2$, сферическая составляющая оператора Лапласа

$$\Delta_{\theta\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}$$

называется оператором Лапласа на сфере.

Теперь займемся нахождением общего решения уравнения (2). Подобные задачи такого вида изучены в работах [1]-[12].

К уравнению (2) применим метод разделения переменных. Представим неизвестную функцию в виде

$$g=e^{-k^2a^2t}R(r)S(\theta,\varphi) \qquad (3)$$

и подставим в уравнение (2), получим два дифференциальных уравнения

$$\Delta_{\theta\varphi}S+\lambda S=0, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0, \qquad (5)$$

где $\lambda-$константа разделения.

Если $\lambda=n(n+1)$, то функция $S(\theta,\varphi)=S_n(\theta,\varphi)$ является сферическая гармоника [13], [14] порядка n, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\theta\varphi}S_n(\theta,\varphi)+n(n+1)S_n(\theta,\varphi)=0.$$

Общее решение последней уравнений найдено в работе [15].

При выполнении замену $R(r)=r^{-1/2}\omega(r)$ и при $\lambda=n(n+1)$ уравнения (5) принимает вид

$$\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\left(k^2-\frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right)\omega=0. \qquad (6)$$

Обозначив $(n+1/2)^2$ через p^2 и поделив обе части (6) на k^2, получим

$$\frac{1}{k^2}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{1}{k^2t}\frac{d\omega}{dt}+\left(1-\frac{p^2}{k^2t^2}\right)\omega=0. \qquad (7)$$

Введем новую функцию по формуле $\omega=t^pu$, будем иметь

$$\frac{1}{k^2t}\frac{d\omega}{dt}=\frac{p}{k^2}t^{p-2}u+\frac{1}{k^2}t^{p-1}u',$$

$$\frac{1}{k^2t}\frac{d^2\omega}{dt^2}=\frac{p(p-1)}{k^2}t^{p-2}u+\frac{2p}{k^2}t^{p-1}u'+\frac{1}{k^2t^p}u''.$$

Подставив найденные выражения в уравнении (7), получим

$$B_{2p+1}u+k^2u=0,$$

поэтому

$$u=C_1j_{2p+1}(kt)+C_2j_{-2p-1}(kt),$$

где $j_\nu(x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(x)/x^\nu$ – j-функции Бесселя, а $J_\nu(x)$ – функция Бесселя порядка ν [16].

Поскольку $\omega = t^p u$, $R(r) = r^{-1/2}\omega$ и $g = e^{-k^2a^2t} R(r) S_n(\theta,\varphi)$, то решение уравнения (1) будем иметь вид

$$g = e^{-k^2a^2t} S_n(\theta,\varphi) r^{-1/2} t^p \left[C_1 j_{2p+1}(kt) + C_2 j_{-2p-1}(kt) \right].$$

ЛИТЕРАТУРА:

15. Karimov K.T. Boundary Value Problems in a Semi-infinite Parallelepiped for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2021. –V.42, No.3, –pp. 560-571.

16. Karimov K.T. Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. –2020, –V.13, No.5. –pp. 533-546.

17. Karimov K.T. Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2020. –V.41, No.1. –pp. 46-57.

18. Karimov K.T. On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three- dimensional elliptic equation with two singular coefficients// Uzbek mathematical journal. –Tashkent, 2018. –№3. -pp. 102-115.

19. Urinov A.K., Karimov K.T. Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients// Journal of Mathematical Sciences. –2021. –V. 254, No.6, -pp.731–742.

20. Urinov A.K., Karimov K.T. Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped// Siberian Electronic Mathematical Reports, –2020. –V.17, -pp.161–178.

21. Urinov A.K., Karimov K.T. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients// Russian Mathematics 2019, -V.63, No.2. –pp. 61-72.

22. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки, –2020, -Т.30, -№1. -С. 31-48.

23. Каримов К.Т. Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Бюллетень Института математики, –Ташкент, 2020. –№2. –С. 68-82.

24. Каримов К.Т. Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. -№4. -С.58-66.

25. Каримов К.Т. Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами// Бюллетень Института математики. –Ташкент, 2018, –№6. –С.10-24.

26. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. –2017, –Т.21, №4, –С. 665–683.

27. Бельтрами Э. Основы теории пространств постоянной кривизны//Сб.«Об основаниях геометрии», М.: ГИТТЛ, 1956, стр.342-365.

28. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. –М.: Наука, 1984.

29. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача на собственные значения для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом//Научный вестник ФерГУ. 2014 г. №1, -С. 9-12.

30. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.