UDK. 517.926

BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA

K.T.Karimov
D.Jo'raeva

Annotasiya: *Mazkur maqolada buziladigan oddiy differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala o'rganilgan. Tenglama almashtirish yordamida Bessel tenglamasiga keltirilgan va uning yechimidan foydalanib dastlabki tenglamaning umumiy yechimi topilgan. Topilgan umumiy yechim chegaraviy shartlarga bo'ysundirib, masalaning formal yechimi topilgan. So'ngra bu yechim, haqiqatdan ham masala yechimi ekanligi ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar: *buziladigan differensial tenglama, Bessel tenglamasi, Bessel funksiyalari, asimptotik formula.*

Hozirgi zamon fani va texnikasida ko'pincha vaqt mobaynida o'tayotgan jarayonlarni tadqiqot qilishga to'g'ri keladi. Bu jarayonlar turli xarakterga ega bo'lishi mumkin: fizik (jism, suyuklik, gaz harakati, temperatura, bosim o'zgarishi va boshqalar), kimyoviy (reaksiya vaqtida biror modda miqdorining o'zgarishi), biologik (raqobatdagi populyatsiyalar sonining o'zgarishi va boshqalar kabi). Bunday jarayonlarni o'rganishda u yoki bu evolyutsion jarayonni tavsiflovchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni bevosita o'rnatish har vaqt ham mumkin bo'lavermaydi. Lekin ko'p hollarda miqdorlar (funktsiyalar) va ularning boshqa (erkli) o'zgaruvchi miqdorlarga nisbatan o'zgarishi tezliklari orasidagi bog'lanishni o'rnatish, ya'ni noma'lum funktsiyalar hosila belgisi ostida qatnashuvchi tenglamalarni topish mumkin bo'ladi. Bunday tenglamalarni differentsial tenglamalar deyiladi. Bunday jarayonlarni tadqiqot qilishning birinchi bosqichi ko'pincha jarayonni tavsiflovchi differentsial tenglamani tuzishdan iborat, ikkinchi bosqichi yesa bu tenglamaning yechimini izlashdan iborat.

Differensial tenglamalarni tuzish uchun to'la-to'kis qoidalar yo'q. Ko'p hollarda oddiy differentsial tenglamalar nazariyasini ko'llab masalalarni yechish usuli quyidagi amallarni bajarishga keltiriladi:

1. Masala shartlarini batafsil tahlil qilish va uning mohiyatini izohlovchi chizmani tuzish.
2. Tekshirilayotgan jarayonning differentsial tenglamasini tuzish.
3. Tuzilgan differentsial tenglamani integrallash va bu tenglamaning umumiy yechimini aniqlash.
4. Berilgan boshlang'ich shartlar asosida masalaning xususiy yechimini aniqlash.
5. Zarurat bo'lishiga qarab, masalaning qo'shimcha shartlaridan foydalanib, yordamchi parametrlarni (masalan: proportsionallik koeffitsienti va boshqalarni) aniqlash.

6. Qaralayotgan jarayonning umumiy qonunini keltirib chiqarish va izlanayotgan miqdorlarni sonli aniqlash.

7. Javobni tahlil qilish va masalaning dastlabki holatini tekshirish.

Masala xarakteriga bog'liq holda bu tavsiyalardan ba'zilari qatnashmasligi ham mumkin.

Quyida biz oddiy differentsial tenglamalar uchun qo'yilgan masalalardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

Agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[0,1]$ intervalda uzluksiz bo'lib, $p(0)=0$ bo'lsa, ushbu

$$\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=f(x),\ x\in(0,1) \qquad \text{(A)}$$

tenglama chegarada buziladigan ikkinchi tartibli differentsial tenglama deyiladi.

(A) tenglamada $p(x)=x^{2\alpha}$, $q(x)=\mu x^{2\alpha}$ va $f(x)=0$, $\alpha\in(-2,1/2)$, $\mu>0$ bo'lgan hol uchun chegaraviy masalalardan birini ko'rib o'taylik.

Quyidagi

$$\left[x^{2\alpha}y'(x)\right]'+\mu x^{2\alpha}y(x)=0,\ x\in(0,a), \qquad (1)$$

tenglamani va

$$y(0)=0,\ y(a)=A,\ A=const\neq 0; \qquad (2)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Bu ishga yaqin ishlarni [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] maqolalardan topish mumkin.

Birinchi bo'lib, (1) tenglamaning umumiy yechimni topamiz. U holda, $\left(t/\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha}p(t)$ ko'rinishda o'zgaruvchilarni almashtiramiz. Bu erda $t=\sqrt{\mu}x$. Natijada quyidagi Bessel tenglamasi deb nomlanuvchi [13]

$$t^2p''(t)+tp'(t)+\left[t^2-(1/2-\alpha)^2\right]p(t)=0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lib [13], qilingan almashtirishdan foydalanib, x o'zgaruvchiga qaytadigan bo'lsak, (1) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)+c_2x^{1/2-\alpha}Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right), \qquad (3)$$

bu erda c_1 va c_2 -ixtiyoriy o'zgarmaslar, $J_l(x)$ va $Y_l(x)$ – mos holda l tartibli birinchi va ikkinchi tur Bessel funktsiyalari deb nomlanadi [13].

(3) ni (2) chegaraviy shartning birinchisiga bo'ysundiramiz. Natijada $x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ funksiyaning $\alpha<1/2$ shartni inobatga olgadigan bo'lsak, $x=0$ dagi qiymati 0 ga teng bo'ladi, $x^{1/2-\alpha}Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ funksiyaning esa $x=0$ dagi

qiymati o'zgarmas songa teng bo'ladi va biz $c_2 = 0$ deyishga majbur bo'lamiz. Natijada (1) tenglamaning (2) shartlardan birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi ko'rinishda bo'lishini topamiz:

$$X(x) = c_1 x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right). \quad (4)$$

Quyilgan (1), (2) masalaning yechimini hosil qilish uchun esa, (4) funktsiyani (2) shartning ikkinchisiga olib borib qo'yamiz:

$$c_1 a^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right) = A.$$

Oxirgi tenglamadan c_1 ni quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$c_1 = A/\left[a^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)\right]. \quad (5)$$

(5) ni (4) ga olib borib qo'yib, (1), (2) masalaning yechimini hosil qilamiz:

$$X(x) = \frac{A x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)}{a^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)}. \quad (6)$$

Masalaning qo'yilishidan ma'lumki, μ sonli parametr musbat qiymatlarni qabul qiladi va $J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)$ funktsiya ko'plab nollarga [1] ega bo'lishi mumkin. Shu sababli

$$J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right) \neq 0 \quad (7)$$

deb qabul qilamiz, aks holda (6) funktsiya (1), (2) masalaning yechimi hisoblanmaydi.

Endi (6) yechimdagi μ sonli parametrning 0 va $+\infty$ ga intilganda, (6) funktsiya qanday holatda bo'lishini o'rganib chiqamiz. Aniqroq aytadigan bo'lsak, (1), (2) masalaning yechimini $\mu > 0$ bo'lganda asoslaymiz. Buning uchun $X(x)$, $x^{2\alpha} X'(x)$ funktsiyalarni $x \in [0,a]$ da va $B^x_{\alpha-1/2} X(x)$ ni esa $x \in (0,a)$ da mavjudligini va chegaralanganligini ko'rsatishimizga to'g'ri keladi. Bu yerda $B^x_q \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2q+1}{2}\frac{d}{dx}$ bo'lib, bu belgi [14] ishda kiritilgan.

1-лемма. Агар $\alpha \in (-2, 1/2)$ оралиқда бўлса, (6) тенглик билан аниқланувчи $X(x)$ функция учун етарли катта μ ларда, қуйидаги баҳолар ўринли:

$$|X(x)| \leq \begin{cases} c_3(\sqrt{\mu})^{-1/2+\alpha} \text{ агар } \alpha \in [0, 1/2), \\ c_4(\sqrt{\mu})^{-1/2} \text{ агар } \alpha \in (-2, 0), \end{cases} \quad (8)$$

$$\left|x^{2\alpha}X'(x)\right|\le\begin{cases}c_5(\sqrt{\mu})^{1/2} \text{ агар } \alpha\in[0,1/2),\\ c_6(\sqrt{\mu})^{1/2-\alpha} \text{ агар } \alpha\in(-2,0),\end{cases}\qquad(9)$$

$$\left|B^x_{\alpha-1/2}X(x)\right|\le\begin{cases}c_7(\sqrt{\mu})^{3/2+\alpha} \text{ агар } \alpha\in[0,1/2),\\ c_8(\sqrt{\mu})^{3/2} \text{ агар } \alpha\in(-2,0),\end{cases}\qquad(10)$$

бу ерда $c_j,\ j=\overline{3,8}-$мусбат ўзгармаслар.

Isbot. Aytaylik $\alpha\in[0,1/2)$. U holda $X(x)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$X(x)=\left(\sqrt{\mu}\right)^{\alpha-1/2}\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi),\qquad(11)$$

bu yerda $\xi=\sqrt{\mu}x$. $\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)$ funksiya $[0,+\infty)$ uzluksiz va $\xi=0$ da nolga teng. Bundan tashqari Bessel funksiyasining $\xi\to\infty$ bo'lgandagi asimptotik formulasidan, ya'ni

$$J_\nu(\xi)\approx\left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2}\cos\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad(12)$$

formuladan $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)=0$ tenglikning o'rinliligi kelib chiqadi. Demak, $\left|\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|$ funksiya $\xi\in[0,+\infty)$ bo'lganda chegaralangan, ya'ni $\left|\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|\le\tilde{c}_9$, bu yerda $\tilde{c}_9=const>0$. Agar buni e'tiborga oladigan bo'lsak (11) dan (8) ning birinchi bahosi kelib chiqadi. Agar $\alpha<0$ bo'lsa, u holda $X(x)$ funksiyani $X(x)=x^{-\alpha}\left(\sqrt{\mu}\right)^{-1/2}\xi^{1/2}J_{1/2-\alpha}(\xi)$ ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $\xi=\sqrt{\mu}x$. Yuqoridagi mulohazadan $\left|\xi^{1/2}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|\le\tilde{c}_{10}=const$, $\xi\in[0,+\infty)$ ekanligini topish mumkin. Buni e'tiborga olib va $\left|\sqrt{a}x^{-\alpha}\right|<a^{1/2-\alpha}$ tengsizlikning $x\in[0,a]$ holda to'g'riligidan, oxirgi tenglikdan (8) ning ikkinchi bahosi to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Endi $x^{2\alpha}X'(x)=\sqrt{\mu}x^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}(\sqrt{\mu}x)$ funksiyani qaraymiz. $\alpha\in[0,1/2)$ bo'lganda, bu funksiyani quyidagi

$$x^{2\alpha}X'(x)=\left(\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha}\xi^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}(\xi),\qquad(13)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $\xi=\sqrt{\mu}x$. $\xi^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}(\xi)$ funksiya $\xi=0$ nuqtada chegaralangan va $\xi\in[0,+\infty)$ bo'lganda uzluksiz. Bundan tashqari (12) ga asosan etarli katta ξ lar uchun $\left|\xi^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}(\xi)\right|<\xi^{\alpha}\tilde{c}_{11}$ o'rinli bo'ladi, bu yerda

$\tilde{c}_{11} = const > 0$. Agar $\xi^{1/2+\alpha} J_{-1/2-\alpha}(\xi)$ funksiyaning xossalarini inobatga oladigan bo'lsak, u holda (13) dan, yetarli katta ξ lar uchun $\left|x^{2\alpha} \tilde{X}'_n(x)\right| \le \tilde{c}_{11}\left(\sigma_n^\alpha / a\right)^{1/2-\alpha} \xi^\alpha = \tilde{c}_{11}\left(\sigma_n^\alpha / a\right)^{1/2} x^\alpha \le c_{11}\left(\sigma_n^\alpha\right)^{1/2}$ tengsizlikka ega bo'lamiz, bu yerdan (9) ning birinchi bahosini hosil qilamiz. Agar $\alpha < 0$ bo'lsa, u holda $(-1/2-\alpha) > -1/2$ munosabatga asosan $\forall \xi \in [0,+\infty)$ uchun $\left|\xi^{1/2+\alpha} J_{-1/2-\alpha}(\xi)\right| \le \tilde{c}_{12} = const$ ekanligi kelib chiqadi. Agar buni e'tiborga olsak, u holda (1.13) dan (9) ning ikkinchi bahosi kelib chiqadi.

Ma'lumki, $X(x)$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi. Bu yerdan $B^x_{\alpha-1/2} X(x) = -\mu X(x)$ ekanligi kelib chiqadi. U holda, (8) bahoga asosan (10) baho kelib chiqadi. Lemma 1 isbotlandi.

Demak, (6) tenglik bilan aniqlanuvchi $X(x)$ funksiya $\alpha \in (-2, 1/2)$ va $\mu > 0$ bo'lganda (1), (2) masalaning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Karimov K.T. Boundary Value Problems in a Semi-infinite Parallelepiped for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2021. –V.42, No.3, –pp. 560-571.
2. Karimov K.T. Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. –2020, –V.13, No.5. –pp. 533-546.
3. Karimov K.T. Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2020. –V.41, No.1. –pp. 46-57.
4. Karimov K.T. On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients// Uzbek mathematical journal. –Tashkent, 2018. –№3. -pp. 102-115.
5. Urinov A.K., Karimov K.T. Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients// Journal of Mathematical Sciences. –2021. –V. 254, No.6, -pp.731–742.
6. Urinov A.K., Karimov K.T. Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped// Siberian Electronic Mathematical Reports, –2020. –V.17, -pp.161–178.
7. Urinov A.K., Karimov K.T. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients// Russian Mathematics 2019, -V.63, No.2. –pp. 61-72.

8. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки, –2020, -Т.30, -№1. -С. 31-48.

9. Каримов К.Т. Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Бюллетень Института математики, –Ташкент, 2020. –№2. –С. 68-82.

10. Каримов К.Т. Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве// Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. -№4. -С.58-66.

11. Каримов К.Т. Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами// Бюллетень Института математики. –Ташкент, 2018, –№6. –С.10-24.

12. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. –2017, –Т.21, №4, –С. 665–683.

13. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.

14. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва: Наука, Физматлит, 1997. 204 с.