УДК 517. 956

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

А.Рафиков
ФерГУ, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений,

Рассмотрим уравнения

$$L_{\beta,\beta}(u) \equiv \mathrm{sign}x\, u_{xx} + \mathrm{sign}y\, u_{yy} + \frac{2\beta}{|x|}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y + \lambda\,\mathrm{sign}(x+y)u = 0, \qquad (1)$$

в области Ω плоскости xOy, ограниченной дугой

$\sigma_0 = \{(x,y): x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0\}$ и отрезками

$AA^* = \{(x,y): x-y=1,\ 0<x<1\}$, $BB^* = \{(x,y): x-y=-1,\ 0<y<1\}$,

$B^*O = \{(x,y): -1<x<0,\ y=0\}$, $OA^* = \{(x,y): x=0,\ -1<y<0\}$,

где $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A^*(0,-1)$, $B^*(-1,0)$, $\beta = const \in R$, причем $0<\beta<1/2$.

При этом используются следующие обозначения:

$\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y):\ x>0, y>0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y): x>0, y<0,\ x+y>0\}$,

$\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y): x<0, y>0,\ x+y>0\}$, $\Omega_1^* = \Omega \cap \{(x,y): x>0, y<0,\ x+y<0\}$,

$\Omega_2^* = \Omega \cap \{(x,y): x<0, y>0,\ x+y<0\}$, $\overline{OA} = \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_1}$, $\overline{OB} = \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_2}$.

$OD = \{(x,y): x+y=0,\ 0<x<1/2\}$, $OE = \{(x,y): x+y=0,\ 0<y<1/2\}$.

Рассмотрим следующую задачу

Задача. Требуется определить непрерывную в $\bar{\Omega}$ функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) является регулярным решением уравнения (1) в $\Omega \setminus \{xy(x+y)=0\}$;

2) выполняются условия склеивания

$$\lim_{x\to -0}(-x)^{2\beta}u_x(x,y) = \lim_{x\to +0} x^{2\beta}u_x(x,y), \quad (0,y)\in OB,$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y) = \lim_{y\to +0} y^{2\beta}u_y(x,y), \quad (x,0)\in OA.$$

3) удовлетворяет условиям

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y)\in \bar{\sigma}_0; \qquad (2)$$

$$u(0,y) = ku(0,-y) + f_1(y), \qquad (0,y)\in \overline{OA^*}; \qquad (3)$$

$$u(x,0) = ku(-x,0) + g_1(x), \qquad (x,0)\in \overline{B^*O}; \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to+0} x^{2\beta}u_x(x,y)=f_2(y),\qquad (0,y)\in OA^*; \qquad (5)$$

$$\lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(x,y)=g_2(x),\qquad (x,0)\in B^*O, \qquad (6)$$

где $\varphi(x,y),\ f_j(t),\ g_j(t),\ j=\overline{1,2}$ – заданные функции, $k=const$ принимает два значения: $k=\pm1$, при $k=1$, $f_1(0)=g_1(0)=0$ а при $k=-1$ $f_1(0)=g_1(0)$.

Пусть λ – комплексный параметр. $\operatorname{Re}u(x,y)=u_1(x,y)$ и $\operatorname{Im}u(x,y)=u_2(x,y)$. Введем обозначения

$$\tau_1(x)=u(x,0),\ (x,0)\in\overline{OA};\ \ \nu_1(x)=\lim_{|y|\to0}|y|^{2\beta}u_y(x,y),\ (x,0)\in OA;$$

$$\tau_2(y)=u(0,y),\ (0,y)\in\overline{OB};\ \ \nu_2(y)=\lim_{|x|\to0}|x|^{2\beta}u_x(x,y),\ (0,y)\in OB;$$

$$\tau_1^*(x)=u(x,0),\ (x,0)\in\overline{B^*O};\ \ \nu_1^*(x)=\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y),\ (x,0)\in B^*O;$$

$$\tau_2^*(y)=u(0,y),\ (0,y)\in\overline{OA^*};\ \ \nu_2^*(y)=\lim_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,y),\ (0,y)\in OA^*,$$

$$\tau_j(t)=\tau_{j1}(t)+i\tau_{j2}(t),\nu_j(t)=\nu_{j1}(t)+i\nu_{j2}(t),\ j=\overline{1,2},$$

$$\tau_j^*(t)=\tau_{j1}^*(t)+i\tau_{j2}^*(t),\nu_j^*(t)=\nu_{j1}^*(t)+i\nu_{j2}^*(t),\ j=\overline{1,2}.$$

Из представления решения задачи Коши-Гурса [1,2] в областях Ω_j и Ω_j^*, найдем

$$\tau_i(x)-\tau_j^*(-x)=\bar{\chi}2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[\nu_i(x)+\nu_j^*(-x)\right],\ 0\le x\le1,\quad i\ne j,\ i,j=\overline{1,2}\ . \qquad (7)$$

Используя формулами (7) в силу условий (3)–(6) имеем

$$\tau_i(x)-k\tau_j(x)=\bar{\chi}2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[\nu_i(x)\right]+\Phi_i(x),\ 0\le x\le1,\ i\ne j,\ i,j=\overline{1,2}, \qquad (8)$$

где

$$\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[f(x)\right]\equiv\int_0^x f(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta}\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt,$$

$$\Phi_1(x)=f_1(-x)+\bar{\chi}2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[f_2(-x)\right],\ \bar{\chi}=\Gamma(\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta);$$

$$\Phi_2(x)=g_1(-x)+\bar{\chi}2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[g_2(-x)\right],$$

$\Xi_2(\cdot)$ -функция Гумберта.

Умножая равенство (8) при $i=2$ на k и сложив полученного равенства почленно в (8) при $i=1$, с учетом $k^2=1$, находим

$$\bar{\chi}2^{2\beta-1}\Gamma(1-2\beta)E_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[\nu_1(x)+k\nu_2(x)\right]=-\left[\Phi_1(x)+k\Phi_2(x)\right]. \qquad (9)$$

Тепер докажем единственность решения задачи

Рассмотрим в области Ω_1 функцию

$$w(x,y)=u(x,y)-u(-y,-x),\ (x,y)\in\Omega_1,\ (-y,-x)\in\Omega_1^*.$$

Тогда уравнения (1) в области Ω_1 равносильно системе уравнений

$$L_{\beta,\beta}(w_1)=w_{1xx}-w_{1yy}+\frac{2\beta}{x}w_{1x}-\frac{2\beta}{y}w_{1y}+\lambda_1 w_1-\lambda_2 w_2=0, \qquad (10)$$

$$L_{\beta,\beta}(w_2)=w_{2xx}-w_{2yy}+\frac{2\beta}{x}w_{2x}-\frac{2\beta}{y}w_{2y}+\lambda_1 w_2+\lambda_2 w_1=0. \qquad (11)$$

Лемма. Если $w(x,y)$ =0 на OC и выполнено следующее условия

$$\begin{cases}\lambda_1\le 0,\\ \lambda_2\ge 0,\\ \dfrac{8\eta}{\eta^2-\xi^2}\ge\lambda_2,\\ -\lambda_1\left(\dfrac{2\xi}{\eta^2-\xi^2}+1\right)\ge\lambda_2,\ 0<\xi<\eta,\ 0<\eta<1.\end{cases} \qquad (12)$$

то для любого регулярного решения уравнения (1) имеет место неравенство

$$\int_0^1 t^{2\beta}\left[\left(\tau_{11}(t)-\tau_{21}^*(-t)\right)\left(\nu_{11}(x)+\nu_{21}^*(-t)\right)+\left(\tau_{12}(t)-\tau_{22}^*(-t)\right)\left(\nu_{12}(x)+\nu_{22}^*(-t)\right)\right]dt\ge 0$$

.

Доказательство. Тождество $(-xy)^{2\beta}\,\bar{w}L_{\beta,\beta}(w)=0$ проинтегрируем по области Ω_1 и, выделяя реальную часть, получим

$$\operatorname{Re}\iint_{\Omega}(-xy)^{2\beta}\,\bar{w}L_{\beta,\beta}(w)=$$

$$\iint_{\Omega_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(-xy)^{2\beta}\left(w_1w_{1x}+w_2w_{2x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[(-xy)^{2\beta}\left(w_1w_{1y}+w_2w_{2y}\right)\right]\right\}dxdy-$$

$$-\iint_{\Omega_1}(-xy)^{2\beta}\left(|w_x|^2-|w_y|^2-\lambda_1|w|^2\right)dxdy=0$$

Отсюда

$$\int_0^1 t^{2\beta}\left[\left(\tau_{11}(t)-\tau_{21}^*(-t)\right)\left(\nu_{11}(t)+\nu_{21}^*(-t)\right)+\left(\tau_{12}(t)-\tau_{22}^*(-t)\right)\left(\nu_{12}(t)+\nu_{22}^*(-t)\right)\right]dt$$

=

$$=\beta\int_{1/2}^{1}\left|w(x,x-1)\right|^2\left(x(1-x)\right)^{2\beta-1}(2x-1)\,dx$$

$$+\iint_{\Omega_1}(-xy)^{2\beta}\left(-\left|w_x\right|^2+\left|w_y\right|^2+\lambda_1\left|w\right|^2\right)dxdy$$

Из однородней условий (3)-(6), последний интеграл перепишем

$$\int_0^1 t^{2\beta}\left[\left(\tau_{11}(t)-k\tau_{21}(t)\right)\nu_{11}(t)+\left(\tau_{12}(t)-k\tau_{22}(t)\right)\nu_{12}(t)\right]dt=$$

$$=\beta\int_{1/2}^{1}\left|w(x,x-1)\right|^2\left(x(1-x)\right)^{2\beta-1}(2x-1)\,dx$$

$$+\iint_{\Omega_1}(-xy)^{2\beta}\left(-\left|w_x\right|^2+\left|w_y\right|^2+\lambda_1\left|w\right|^2\right)dxdy,$$

где $\beta\int_{1/2}^{1}\left|w(x,x-1)\right|^2\left(x(1-x)\right)^{2\beta-1}(2x-1)\,dx\geq 0$.

В уравнениях (10) и (11) перейдем к характеристическим координатам $\xi=x+y,\ \eta=x-y$ и найдем

$$w_{1\eta}=\frac{\eta^2-\xi^2}{2\beta\xi}\left[w_{1\xi\eta}+\frac{2\beta\eta}{\eta^2-\xi^2}w_{1\xi}+\frac{\lambda_1}{4}w_1-\frac{\lambda_2}{4}w_2\right];$$

$$w_{2\eta}=\frac{\eta^2-\xi^2}{2\beta\xi}\left[w_{2\xi\eta}+\frac{2\beta\eta}{\eta^2-\xi^2}w_{2\xi}+\frac{\lambda_1}{4}w_2+\frac{\lambda_2}{4}w_1\right].$$

При этом область Ω_1 перейдет соответственно в $\Delta=\left\{(\xi,\eta):0<\xi<\eta<1\right\}$.

$$I=\iint_{\Omega_1}(-xy)^{2\beta}\left(-\left|w_x\right|^2+\left|w_y\right|^2+\lambda_1\left|w\right|^2\right)dxdy=$$

$$=4^{-2\beta}\iint_{\Delta}\left(-2\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta}w_{1\xi}w_{1\eta}-2\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta}w_{2\xi}w_{2\eta}+\frac{\lambda_1}{2}\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta}\left|w\right|^2\right)d\xi d\eta.$$

(13)

Подставляя выражение $w_{1\eta}$ и $w_{2\eta}$ в интеграл (13), получим

$$I=4^{-2\beta}\iint\limits_{\Delta}\left\{\left(-\frac{\lambda_1\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta+1}}{8\beta\xi}|w|^2\right)_{\xi}-\left(\frac{\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta+1}}{2\beta\xi}\left|w_{\xi}\right|^2\right)_{\eta}\right\}d\xi d\eta+$$

$$+4^{-2\beta}\iint\limits_{\Delta}\left\{\left|w_{\xi}\right|^2\frac{\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta}}{8\beta\xi}\left(8\eta-\lambda_2\left(\eta^2-\xi^2\right)\right)+|w|^2\frac{\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta}}{8\beta\xi}\left[\left(-2\xi-\left(\eta^2-\xi^2\right)\right)\lambda_1-\left(\eta^2-\xi^2\right)\lambda_2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_2\left(\eta^2-\xi^2\right)^{2\beta+1}}{8\beta\xi}\left[\left(w_2+w_{1\xi}\right)^2+\left(w_1-w_{2\xi}\right)^2\right]\right\}d\xi d\eta=I_1+I_2.$$

Принимая формулу Грина к I_1 и учитывая условия $w=0$ на OC, имеем

$$I_1=4^{-2\beta}\int\limits_0^1\frac{\left(1-\xi^2\right)^{2\beta+1}}{2\beta\xi}\left|w_{\xi}(\xi,1)\right|^2d\xi.$$

Второй интеграл I_2 будет неотрицателен, если выполнено условия, которого дано в лемме. Лемма доказано.

Теорема. Если в классе регулярных решений уравнения (1) существует решение задачи, то оно единственно при условии (12).

Доказательство. Рассмотрим уравнения (1) в области Ω_0. В области Ω_0 нетрудно установит следующее

$$\operatorname{Re}(xy)^{2\beta}\bar{u}L_{\beta,\beta}(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left[(xy)^{2\beta}\left(u_1u_{1x}+u_2u_{2x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(xy)^{2\beta}\left(u_1u_{1y}+u_2u_{2y}\right)\right]-$$

$$-(xy)^{2\beta}\left(\left|u_x\right|^2+\left|u_y\right|^2-\lambda_1|u|^2\right)$$

Интегрируя обе части этого тождества, получим

$$\int\limits_0^1t^{2\beta}\left[\left(\tau_{11}(t)\nu_{11}(t)+\tau_{21}(t)\nu_{21}(t)\right)+\left(\tau_{12}(t)\nu_{12}(t)+\tau_{22}(t)\nu_{22}(t)\right)\right]dt+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(\left|u_x\right|^2+\left|u_y\right|^2-\lambda_1|u|^2\right)dxdy=0. \qquad (14)$$

Из однородного условия (9) вытекает $\nu_2(x)=-k\nu_1(x)$, и подставим эго в (14) получим

$$\int\limits_0^1t^{2\beta}\left[\left(\tau_{11}(t)-k\tau_{21}(t)\right)\nu_{11}(t)+\left(\tau_{12}(t)-k\tau_{22}(t)\right)\nu_{12}(t)\right]dt+$$

$$+\iint_{\Omega_0}(xy)^{2\beta}\left(|u_x|^2+|u_y|^2-\lambda_1|u|^2\right)dxdy=0. \qquad (15)$$

По лемме первый интеграл, стоящий слева в равенстве (15) не отрицателен, второй интеграл по области Ω_0 также неотрицателен, когда $\lambda_1 \leq 0$. Из этих следует, что $u_x = u_y = 0$ в области Ω_0, т.е. $u \equiv const$ в Ω_0. В силу однородной условий (2) вытекает, что $u \equiv 0$ в Ω_0. В силу единственности решения видоизменений задачи Коши для уравнения (1) в областях Ω_j и Ω_j^* $\left(j=\overline{1,2}\right)$, $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{\Omega}_j,\overline{\Omega}_j^*,\ j=\overline{1,2}$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{\Omega}$. Отсюда следует, утверждения теоремы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна. // Дифференциальные уравнения. 1968. Т.4. № 8. с. 1465-1483.