ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

Каршибоев Хайрулло Киличович
канд.физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедры
“Высшей математики”,
Самаркандский институт экономики и сервиса,
Республика Узбекистан, г.Самарканд

RENORMALIZED COORDINATES FOR HOMEOMORPHISMS OF A CIRCLE WITH ONE BREAK POINT

Karshiboev Khayrullo Kilichovich
Candidate of Physics and Mathematics Sciences,
Associate Professor, Head. departments
"Higher Mathematics"
Samarkand Institute of Economics and Service,
Republic of Uzbekistan, Samarkand

Аннотация: *В настоящей работе, найдены соотношение между* z_i *и* z_{i+1}, (t_j *и* t_{j+1}), *а затем показано, что* $z_{q_{n+1}}$ *и* t_{q_n} *являются почти дробно-линейными функциями от* z_0 *и* t_0 *соответственно, где предполагается, что определяющая функция* $f(x)$, *удовлетворяет условиям* $(c_1)-(c_4)$ *и число вращения* $\rho=\rho(T_f)$ *иррационально.*

Abstract: *In the present paper, we find the relation between* z_i *and* z_{i+1}, (t_j *and* t_{j+1}), *then it is shown that* $z_{q_{n+1}}$ *and* t_{q_n} *are almost linear-fractional functions of* z_0 *and* t_0, *respectively, where it is assumed that the defining function* $f(x)$ *satisfies the conditions* $(c_1)-(c_4)$ *and the rotation number is* $\rho=\rho(T_f)$ *irrational.*

Ключевые слова: *гомеоморфизмов окружности, ренормализация, число вращения.*

Key words: *circle homeomorphism, renormalization, rotation number.*

Введение. Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T_f единичной окружности $T_f x=\{f(x)\}, \quad x\in S^1=[0,1)$ (1.1) где скобка $\{\cdot\}$- обозначает дробную часть числа, а $f(x)$-определяющая функция T_f, удовлетворяет следующим условиям:

(c_1) $f(x)$-непрерывная, строго возрастающая функция на R^1;

(c_2) $f(x+1)=f(x)+1$ для любого $x\in R^1$;

(c_3) гомеоморфизм $T_f x$ в точке $x=x_b$ имеет излом, т.е. существуют конечные односторонние производные $f'(x_b\pm 0)>0$ и $f'(x_b-0)\neq f'(x_b+0)$;

(c_4) $f'(x)$-абсолютно непрерывная функция на $[x_b,\, x_b+1]$ и $f''\in L_p(S^1;dl)$ при некотором $p>1$.

Число $\sigma=\sigma_f(x_b)=\dfrac{f'(x_b-0)}{f'(x_b+0)}$ называется величиной излома T_f в точке $x=x_b$. Условие (c_4) называется условием гладкости Кацнельсона и Орнстейна.

Анализ и результаты. Пусть число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально и разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид: $\rho=[k_1,k_2,\ldots,k_n,\ldots]$.

Положим $\dfrac{p_n}{q_n}=[k_1,k_2,\ldots,k_n],\quad n\geq 1$.

Числа q_n-удовлетворяют разностному уравнению:

$q_{n+1}=k_{n+1}q_n+q_{n-1},\quad q_0=1,\ q_1=k_1,\quad n\geq 1.$

Обозначим особую точку x_b через x_0 и рассмотрим ее итерации, т.е. $x_i=T_f^i x_0,\ i\geq 1$. Обозначим $\Delta_0^{(n)}=\Delta_0^{(n)}(x_0)$-замкнутый отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Обозначим через $V_n=V_n(x_0)$ замкнутый интервал, соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. Ясно, что $V_n=\Delta_0^{(n)}\bigcup\Delta_0^{(n+1)}$. Интервал V_n-называется n-ой ренормализационной окрестностью точки x_0. Определим отображение Пуанкаре по формуле:

$$\pi_n(x)=\begin{cases}T_f^{q_{n+1}}x, & \text{если } x\in\Delta_0^{(n)}\setminus\{x_0\},\\ T_f^{q_n}x, & \text{если } x\in\Delta_0^{(n+1)}.\end{cases}\qquad (1.2)$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) нас интересует главным образом поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$, при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка V_n экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, поведение $\pi_n(x)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах. Введем перенормированные координаты z на V_n:

$$z=\frac{x-x_0}{x_0-x_{q_n}},\quad x\in V_n\quad (1.3)$$

Обозначим $a_n = \dfrac{x_{q_{n+1}} - x_0}{x_0 - x_{q_n}}$. Очевидно, что $a_n > 0$. При $x \in V_n$, соответствующие координаты z принимают значения от -1 до a_n. В новых координатах отображению π_n соответствует следующая пара (f_n, g_n):

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}},$$
$$g_n(z) = \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \qquad (1.4)$$

Пара функции (f_n, g_n) называется n-ой ренормализацией отображения π_n. Положим $\Delta_i^{(n)} = T_f^i \Delta_0^{(n)}$, $i \geq 1$, $n \geq 1$. Пусть для определенности n-нечетное число, тогда имеет место соотношение $x_{q_{n+1}} \prec x_0 \prec x_{q_n}$.

Система отрезков $\xi_n = \{\Delta_i^{(n+1)},\ 0 \leq i < q_n;\ \Delta_j^{(n)},\ 0 \leq j < q_{n+1}\}$ образует разбиение окружности (см. [1]). При этом соседние два отрезки из ξ_n пересекаются одной лишь концевой точкой.

Введем относительные координаты z_i, $0 \leq i \leq q_{n+1}$, внутри отрезков $\Delta_i^{(n)}$ и t_j, $0 \leq j \leq q_n$, внутри отрезков $\Delta_j^{(n+1)}$ по формулам:

$$z_i = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+q_n}}, \qquad x \in \Delta_i^{(n)},$$
$$t_j = \frac{x_{q_{n+1}+j} - x}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}, \qquad x \in \Delta_j^{(n+1)} \qquad (1.5)$$

Лемма 1.1. Имеют место следующие равенства:

$$z_i = \frac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}, \qquad z \in [-1;0]$$
$$t_j = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}, \qquad z \in [0; a_n] \quad (1.6)$$

Доказательство леммы 1.1. Лемма 1.1 доказывается прямым вычислением. Если $x \in \Delta_i^{(n)}$, тогда $T_f^{-i} x \in \Delta_0^{(n)}$. Используя равенство (1.3) получаем: $T_f^{-i} x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$ и $z \in [-1;0]$. Из этого $z_i = z_i(z) = \dfrac{x_i - x}{x_i - x_{i+q_n}} = \dfrac{x_i - T_f^i(T_f^{-i} x)}{x_i - x_{i+q_n}} = \dfrac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}$; Точно также, если $x \in \Delta_j^{(n+1)}$, тогда $T_f^{-j} x \in \Delta_0^{(n+1)}$ и $T_f^{-j} x = x_0 + z(x_0 - x_{q_{n+1}})$, $z \in [0; a_n]$.

Учитывая это получаем

$$t_j = t_j(z) = \frac{x_{j+q_{n+1}} - x}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(T_f^{-j}x)}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}.$$

Лемма 1.1 доказана.

В настоящем параграфе, мы найдем соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем покажем, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно. Ниже мы всюду предполагаем, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально.

Введем следующие обозначения: $\alpha_i = x_{i+q_n}$, $\gamma_i = x_i$, $\beta_i = T_f^i x$, $x \in \Delta_0^{(n)}$. Ясно, что $\beta_i \in [\alpha_i, \gamma_i]$, $0 \le i < q_{n+1}$,

$$A_i = -\frac{\dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\beta_i-\alpha_i)}\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(y-\alpha_i)dy + \dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i)}\displaystyle\int_{\beta_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy}{1+\dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i)}\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy},$$

$$B_i = \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)}dy, \qquad m_{n+1} = \exp\left\{\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} B_i\right\},$$

$$\psi_i = -B_i - \ln\left(\frac{1+A_i z_i}{1+A_i(z_i-1)}\right), \qquad \tau_{n+1}(z_0) = \sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\psi_i.$$

Теорема 1.1. Справедливо следующее равенство:

$$z_{q_{n+1}} = \frac{z_0 m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))}{1+z_0(m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))-1)} \qquad (1.7)$$

Доказательство. Теорема 1.1 доказывается прямым вычислением.

Ясно, что

$$z_i = \frac{\gamma_i - \beta_i}{\gamma_i - \alpha_i}, \qquad z_{i+1} = \frac{\gamma_{i+1} - \beta_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \alpha_{i+1}},$$

где, $\alpha_{i+1} = f(\alpha_i)$,

$$\beta_{i+1} = f(\beta_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(\beta_i - y)dy,$$

$$\gamma_{i+1} = f(\gamma_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\gamma_i - \alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i - y)dy.$$

Подставляя в выражение для z_{i+1}, получаем:

$$z_{i+1}=\frac{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i)+\int\limits_{\alpha_i}^{\gamma_i}f''(y)(\gamma_i-y)dy-\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i}f''(y)(\beta_i-y)dy}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i)+\int\limits_{\alpha_i}^{\gamma_i}f''(y)(\gamma_i-y)dy}=$$

$$=\frac{\gamma_i-\beta_i}{\gamma_i-\alpha_i}\left(1+\frac{(\beta_i-\alpha_i)\int\limits_{\alpha_i}^{\gamma_i}f''(y)(\gamma_i-y)dy-(\gamma_i-\alpha_i)\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i}f''(y)(\beta_i-y)dy}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i)+(\gamma_i-\beta_i)+\int\limits_{\alpha_i}^{\gamma_i}f''(y)(\gamma_i-y)dy}\right)=$$

$$=z_i(1+A_i(z_i-1)).$$

Из это вытекает что

$$\frac{1-z_{i+1}}{z_{i+1}}=\frac{1-z_i-(z_i-1)A_iz_i}{z_i(1+A_i(z_i-1))}=\frac{1-z_i}{z_i}\cdot\frac{1+A_iz_i}{1+A_i(z_i-1)}=\frac{1-z_i}{z_i}\exp(-B_i)\cdot\exp(-\psi_i).$$

Используя это равенство получим:

$$\frac{1-z_{q_{n+1}}}{z_{q_{n+1}}}=\frac{1-z_0}{z_0}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}B_i\right\}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\psi_i\right\}=\frac{1-z_0}{z_0}\cdot\frac{1}{m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))} \quad (1.8)$$

Решая уравнение (1.8) относительно $z_{q_{n+1}}$, получим доказательство теоремы 1.1.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома//Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.

2. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle// Ergodic Theory Dynam.Systems.-1989.- № 9(4).-P.643-680.

3. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.

4. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.