ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКИ ИЗЛОМАМИ

Исматов Уткир Рустамович
Самаркандский институт экономики и сервиса

Аннотация. *В данной статья изучено однопараметрическое семейство гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Доказано, что в случае рационального числа вращения число периодических траекторий не превышает двух.*

В этом работе сформулируем и докажем предельную теорему для последовательности функций распределения времени $k-$*го попадания* $\Phi_n^{(k)}(t),\ \ k>1$.

Ключевые слова: *гомеоморфизмов окружности, времени попадания, число вращения.*

BITTA SINISH NUQTASIGA EGA BO'LGAN AYLAN GOMEOMORFIZMLARINING BIR PARAMETRLI OILASI

Annotatsiya. *Bu ishda bitta sinish nuqtasiga ega bo'lgan aylana gomeomorfizmlarning bir parametrli oilasi o'rganilgan bo'lib, burish soni ratsional bo'lgan holda davriy trayektoriyalar soni ikkitadan oshmasligi isbotlangan.*

Kalitli so'zlar: *aylana gomeomorfizmi, burish soni.*

ON A FAMILY OF CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH ONE BREAK POINT

Abstract. *In this article, we study a one-parameter family of circle homeomorphisms with one break point. It is proved that in the case of a rational rotation number the number of periodic trajectories does not exceed two.*

Keywords: *circle homeomorphism, renormalization, rotation number*.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизмов окружности T_f с поднятием f т.е.

$$T_f x = f(x)\ (\bmod 1),\ \ x\in S^1 = R^1/Z^1 \cong [0,1),$$

где $f(x)$- непрерывная, строго возрастающая функция на R^1, удовлетворяющая условию $f(x+1)=f(x)+1,\ \ x\in R^1$. Функция f называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма T_f. Отметим, что поднятие f определено с точностью до аддитивной целой константы, но эта неоднозначность устраняется начальным условием

$0 \le f(0) < 1$. А.Пуанкаре показал, что для любого $x \in R^1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho_f$, здесь и всюду в дальнейшем $f^{(n)}(x)$-обозначает n-ую итерацию функции $f(x)$. Число $\rho = \rho_f$ называемое *числом вращения*, не зависит от выбора x и является важнейшей числовой характеристикой гомеоморфизма T_f.

Предположим, что число вращения $\rho = \rho_f$ иррационально. Пусть разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots]$, $k_n \ge 1$. Обозначим $\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, $n \ge 1$. Числа q_n-называются *временами первого возвращения* и удовлетворяют разностному уравнению: $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1}$, $n \ge 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = k_1$.

Пусть $x_0 \in S^1$. Положим $x_i = T_f^i x_0$, $i \ge 1$. Заметим , что при нечётном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при чётном n - справа. Обозначим через $V_n(x_0)$ замкнутый отрезок соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. $V_n(x_0)$ - называется *n - ой ренормализационной окрестностью* точки x_0. Определим *отображение Пуанкаре* $\pi_n : V_n(x_0) \to V_n(x_0)$:

$$\pi_n(x) = \begin{cases} T_f^{q_{n+1}} x, & \text{если} \quad x \in [x_{q_n}, x_0), \\ T_f^{q_n} x, & \text{если} \quad x \in [x_0, x_{q_{n+1}}]. \end{cases}$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) главным является изучение поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку длина отрезка $V_n(x_0)$ экспоненциально стремится к нулю и $q_n \to \infty$ при $n \to \infty$, поведение $\pi_n(x_0)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах. Введем перенормированные координаты z на $V_n(x_0)$: $x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$. Отсюда видно, что в новых координатах $x_0 \to 0$, $x_{q_n} \to -1$. Обозначим через a_n и $(-b_n)$ перенормированные координаты точек $x_{q_{n+1}}$ и $x_{q_n + q_{n+1}}$ соответственно. В новых координатах отображению $\pi_n(x)$ соответствует следующая пара (f_n, g_n):

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}}, \qquad z \in [-1, 0],$$

$$g_n(z) = \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \qquad z \in [0, a_n].$$

Хорошо известно, что преобразование ренормгруппы в множестве гомеоморфизмов окружности с изломами имеет периодические траектории. Обозначим через X множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x\in[-1,0];\ g(x),\ x\in[0,\alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$a)\quad f(0)=\alpha,\ g(0)=-1,\quad f(-1)=g(\alpha),\quad f(-1)<0,\quad f^{(2)}(-1)\geq 0;$$

$b)\quad f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ \ g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$, при некотором $\varepsilon>0$.

Определим преобразование ренормализационной группы $R_b : X\rightarrow X$:

$$R_b(f(x),\ x\in[-1,0];\ g(x),\ x\in[0,\alpha])=(\tilde{f}(x),\ x\in[-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x\in[0,\alpha']),$$

где $\tilde{f}(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\ \ \tilde{g}(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\ \ \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1)$.

Положим $c=f'(-0)\cdot\left(g'(+0)\right)^{-1}$, т.е. c - величина излома пары (f,g) в точке $x=0$. В работе Вула и Ханина доказано, что при фиксированном c и числе вращения равным “золотому сечению”, преобразование R_b имеет единственную периодическую орбиту $\{f_i(x),\ g_i(x),\ i=1,2\}$ периода два. Функции $f_i(x,c_i),\ g_i(x,c_i),\ i=1,2$ имеют вид:

$$f_i(x)=\frac{(\alpha_i+c_ix)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x},\quad g_i(x)=\frac{\alpha_i\beta_i(x-c_i)}{\alpha_i\beta_ic_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

где $\alpha_1=\dfrac{c_1-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ \alpha_2=\dfrac{c_2-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ c_1=c,\ c_2=c^{-1},\ \beta_1=\beta_2=\beta_0,$ а число β_0 – единст-венный корень уравнения $\beta^4-\beta^3-\beta^2\dfrac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0$ принадлежащий интервалу $(0,1)$. При помощи пар $(f_i,g_i),\ i=1,2$ определим гомеоморфизмы окружности T_i: $T_i(x)=l_i\left(f_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если $0\leq x<\left(1+\alpha_i\right)^{-1}$ и $T_i(x)=l_i\left(g_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если $\left(1+\alpha_i\right)^{-1}\leq x<1$. Числа вращения этих гомеоморфизмов равны “золотому сечению”. Мы будем изучать гомеоморфизм T_1. Гомеоморфизм T_2 изучается аналогичным образом. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b.

Определение 1. Два сохраняющих ориентацию гомеоморфизмы окружности T и G называются C^k-**сопряженными**, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $H\in C^k(S^1)$ (при $k\geq 1$ требуется $H^{-1}\in C^1(S^1)$) такой, что выполняется равенство $H\circ T=G\circ H$. Гомеоморфизм H называется **сопряжением** между T и G.

Обозначим через $B(T_b)$ множество всех C^1-сопряженных с T_b гомеоморфизмов окружности.

Пусть $n\geq 1$ и $V_n(x_0)$ - $n-$ая ренормализационная окрестность точки $x_0\in S^1$. Определим

$E_n^{(1)}(x)=\min\{i\geq 1: T_f^i x\in V_n(x_0)\}$,

$E_n^{(k)}(x)=\min\{i\geq E_n^{(k-1)}(x): T_f^i x\in V_n(x_0)\}$, $k\geq 1$. Рассмотрим случайные величины $D_n^{(k)}(x)=E_n^{(k)}(x)-E_n^{(k-1)}(x)$. Отметим, что $D_n^{(1)}(x)=E_n^{(1)}(x)$ принимает значения от 1 до q_{n+1}, а $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: q_n и q_{n+1}. Введем нормированные случайные величины: $\overline{D}_n^{(k)}(x)=q_{n+1}^{-1}\, D_n^{(k)}(x)$. Задача состоит в изучении сходимости функции распределений для случайных величин $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ при $n\to\infty$, а также их предельные распределения.

Обозначим $F_n^{(k)}(t)=\mu_f(\{x\in S^1:\overline{D}_n^{(k)}(x)\leq t\}), t\in R^1$. Отметим, что функции $F_n^{(k)}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота T_ρ. В работе де Фария и Коэло доказано, что в зависимости от числа вращения ρ предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$ является или равномерным, или непрерывным и кусочно-линейным на отрезке $[0,1]$. А в случае $k>1$ предельное распределение для сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$является или распределением случайной величины $X\equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(t)$ функцию распределения $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега l: $\Phi_n^{(k)}(t)=l(\{x\in S^1:\overline{D}_n^{(k)}(x)\leq t\})$, $t\in R^1$.

Если диффеоморфизм T_f гладко сопряжен с линейным поворотом T_ρ, то для последовательности $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F_n^{(k)}(t)\}$, также справедливы. С другой стороны, для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома (или с несколькими точками излома лежащими на одной орбите и с нетривиальным произведением величин изломов) и с иррациональным числом вращения ρ_f сопрягающий гомеоморфизм T_φ является сингулярным.

В этом работе сформулируем и докажем предельную теорему для последовательности функций распределения времени $k-$го попадания $\Phi_n^{(k)}(t)$, $k>1$. Возьмем произвольный гомеоморфизм окружности $T\in B(T_0)$. Напомним, что $E_n^{(k)}(x)$ означает времени $k-$го попадания точки $x\in S^1$ в $n-$ый ренормализационный отрезок V_n. Обозначим $D_n^{(k)}(x)=E_n^{(k)}(x)-E_n^{(k-1)}(x)$, $x\in S^1$. Случайная величина $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: q_n или q_{n+1}. Нормируем её разделивна на q_{n+1}^{-1}:

$\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1} D_n^{(k)}(x)$.

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(x)$ функцию распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега l.

Теорема 1. Пусть $k > 1$. Тогда функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега задается следующим образом:

$$\Phi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & если \quad t < q_n\, q_{n+1}^{-1}; \\ \sum\limits_{i=0}^{q_n - 1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k} \Delta_0^{(n+1)})) + \\ + \sum\limits_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k} \Delta_0^{(n+1)})), & если \quad q_n q_{n+1}^{-1} \le t < 1; \\ 1, & если \quad t \ge 1. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть гомеоморфизм $T \in B(T_b)$, $k > 1$ и $\Phi_n^{(k)}(t)$-функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$. Тогда

1) для всех $t \in R^1$ существует конечные предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)$,

причем $\Phi^{(k)}(t) = 0$, если $t \le 0$, и $\Phi^{(k)}(t) = 1$, если $t \ge 1$;

2) функция $\Phi^{(k)}(t)$ является ступенчатой функцией на $[0,1]$ с двумя точками

разрыва.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что $k > 1$. Функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ - ступенчатая функция, принимающая только три значения. Поэтому докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{D}_n^{(k)}(t)$ в три этапа.

1) $D_n^{(k)}(t) = 0$, если $t < q_n\, q_{n+1}^{-1}$. Учитывая

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \rho$$

получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(k)}(t) = 0$, если $t \le \rho$.

2) Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(k)}(t) = 1$, если $t \ge 1$.

3)Теперь докажем существование предела суммы

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) + \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) \quad (1)$$

Сначала мы должны выяснить структуру множества $\pi_n^{-1}(\Delta_0^{(n+1)}) \cap V_n$.

Напишем явный вид функции $\pi_n^{-1}(x)$:

$$\pi_n^{-1}(x) = \begin{cases} T^{-q_n}x, & если \quad x \in [x_{q_n}, x_{q_{n+2}}), \\ T^{-q_{n+1}}x, & если \quad x \in [x_{q_{n+2}}, x_{q_{n+1}}) \end{cases}$$

Функция $\pi^{-1}(x)$, как видно из последней формулы, имеет разрыв только в точке $x = x_{q_{n+2}}$. Следовательно, для любого интервала $I \subset V_n$ область $\pi^{-1}(I)$ представляет собой интервал, если $x_{q_{n+2}} \in I$, или сумму двух интервалов, если I не содержит точку $x_{q_{n+2}}$, или сумму двух интервалов, если $x_{q_n} \in I$. Отсюда вытекает, что

$$\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}) = \bigcup_{m=1}^{l_1(k)} \omega'_m,$$

$$\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}) = \bigcup_{p=1}^{l_2(k)} \omega''_p$$

где ω'_m и ω''_p- такие интервалы, что $\omega'_m \subset \Delta_0^{(n+1)}$, $1 \le m \le l_1(k)$; $\omega''_p \subset \Delta_0^{(n)}$, $1 \le p \le l_2(k)$. Отметим, что $l_1(k) + l_2(k) \le 2^k$. Сумму (1) обозначим S_n и напишем в следующем виде:

$$S_n = \sum_{m=1}^{l_1(k)} \sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m)) + \sum_{p=1}^{l_2(k)} \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p)).$$

В силу утверждения теоремы 2.6 суммы $\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m))$ и $\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p))$ сходится при $n \to \infty$, отсюда следует, что существует конечный предел суммы S_n при $S_n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. –М.: Наука, 1980.

2. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.

3. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.

4. Coelho Z., de Faria E. Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle// Israel J.Math.-1996.- №93.-P.93-112.

5. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. IJODKOR O'QITUVCHI, 2(20), 86-89.

6. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. IJODKOR O'QITUVCHI, 2(20), 86-89.

7. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. *IJODKOR O'QITUVCHI*, *2*(20), 86-89.

8. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. *IJODKOR O'QITUVCHI*, *2*(20), 86-89.

9. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. *IJODKOR O'QITUVCHI*, *2*(20), 86-89.

10. Daniyarovich, R. B. X. Y. I. (2022). MILLIY OQUV DASTURI ASOSIDA INNOVATSION KASBGA YONALTIRISH. *IJODKOR O'QITUVCHI*, *2*(20), 86-89.