ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМАМИ

Рахимова Умида Зиядуллаевна
Ассистент “Высшей математики”,
Самаркандский институт экономики и сервиса,
Республика Узбекистан, г.Самарканд

ABOUT ONE FAMILY DISPLAY OF A CIRCLE WITH ONE POINT OF BREAKS

Raximova Umida Ziyadullayevna
Assestent "Higher Mathematics"
Samarkand Institute of Economics and Service,
Republic of Uzbekistan, Samarkand

Аннотация. *В данной статья изучено однопараметрическое семейство гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. Доказано, что в случае рационального числа вращения число периодических траекторий не превышает двух.*

Ключевые слова: *гомеоморфизмов окружности, ренормализация, число вращения.*

Abstract. *In this article, we study a one-parameter family of circle homeomorphisms with one break point. It is proved that in the case of a rational rotation number the number of periodic trajectories does not exceed two.*

Key words: *circle homeomorphism, renormalization, rotation number.*

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений единичной окружности [1]:

$$T_{\Omega}x = \{ f(x, \Omega)\}, \quad x \in S^1 = [0, 1), \ \ \Omega \in [0; 1]$$

где скобка $\{\cdot\}$ - обозначает дробную часть числа, а $f(x,\Omega)$-удовлетворяет следующим условиям:

$a)$ при фиксированном Ω, $f(x; \Omega)$ -непрерывная монотонно возрастающая функция;

$b)$ $f(0;0)=0,\ \ f(x+1;\Omega) = f(x;\Omega)+1,$ для любого $x \in R^1$;

$c)$ $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial \Omega} > const > 0;$

$d)$ $t_0 : [0;1] \to [0;1]$ непрерывная кривая;

e) при каждом фиксированном $\Omega \in [0;1]$, $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial x} > const > 0;$ для $\forall x \in S^1 \setminus \{t_0(\Omega)\}$, $f(x;\Omega) \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{t_0(\Omega)\})$, при некотором $\varepsilon > 0$ и

$$\frac{f_-^{'}(t_0(\Omega),\Omega)}{f_+^{'}(t_0(\Omega),\Omega)} = c(\Omega) \neq 1.$$

Обозначим ρ_Ω число вращений, отвечающее T_{f_Ω} [2]:

$$\rho_\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x,\Omega)}{n}$$

Из условий $d) - e)$ вытекает, что $T_\Omega x$ при каждом фиксированном значении параметра имеет только одну точку излома $t_0(\Omega)$. Число $c(\Omega)$ называется величиной излома T_Ω.

Всюду в дальнейшем мы будем обозначать через $f^{(n)} - n$-ую суперпозицию функции f. Легко видеть, что ρ_Ω монотонно (не строго) зависит от параметра Ω. Заметим, что каждому рациональному $\rho = \dfrac{p}{q}$ отвечают невырожденный отрезок (значений Ω таких, что $\rho_\Omega = \dfrac{p}{q}$, в том время как иррациональному ρ отвечает единственно Ω).

Пусть $A = \left(\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}\right) \subset (0,1)$ - интервал Фария $n-$го уровня [1]:

1) $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$

2) Все рациональные числа внутри интервала A имеют вид $\dfrac{kp_1 + lp_2}{kq_1 + lq_2}$.

Рациональное число с минимальным знаменателем равно $\dfrac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$.

Выберем произвольную точку x_0 на окружности и отрезок траектории этой точки $\{x_i = T_\Omega^i x_0, 0 \le i < q_1 + q_2\}$. Обозначим $\Delta_0^{(1)}$ и $\Delta_0^{(2)}$ отрезки $[x_0, x_{q_1}]$ и $[x_{q_2}, x_0]$, соответственно. Обозначим также образы этих отрезков под действием T_Ω через $\Delta_i^{(1)}$ и $\Delta_j^{(2)}$ [1]:

$$\Delta_i^{(1)} = T^i \Delta_0^{(1)}, \quad \Delta_j^{(2)} = T^i \Delta_0^{(2)} \quad .$$

Следующее утверждение было доказано в [1] и в нашей ситуации работает без каких-либо изменений.

Лемма 1. Предположим $\rho(T)\in\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)$. Отрезок траектории $\{x_i=T_\Omega^i x_0, 0\le i<q_1+q_2\}$ разбивает окружность на непересекающиеся отрезки $\Delta_i^{(1)}$, $0\le i<q_2$ и $\Delta_j^{(2)}$, $0\le j<q_1$.

Обозначим построенное разбиение $\xi(A, x_0)$. Положим $\upsilon=\upsilon ar_{S^1}\ln f'<\infty, \bar{\upsilon}=\upsilon+|\ln f'(x_0-0)+\ln f'(x_0+0)|$,
$q=\max(q_1,q_2)$, $p=\max(p_1, p_2)$. Рассмотрим произвольную траекторию $y_i=T_\Omega^i y_0$, $y_0\in S^1$, такую, что $y_i\neq x_0=0$, $0\le i<q_2$.

Лемма 2. Предположим $\rho(T)\in\left(\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2},\frac{p}{q}\right)$ или $\rho(T)=\left(\frac{p}{q}\right)$. Тогда

$$e^{-\bar{\upsilon}}\le\prod_{i=0}^{q-1}f'(y_i)\le e^{\bar{\upsilon}}.$$

Пусть $A_n=\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2}\right)$- интервал Фарея $n-$го ранга [1], а $A_m, m<n$- некоторой интервал Фарея ранга m, содержащий A_n. Пусть $\rho(T)\in A_n$. Выберем Δ_n - произвольным элемент разбиения $\xi(A_m,t_0)$, содержащий Δ_n. Обозначим через $|\Delta|$.

Лемма 3. Положим $\lambda=(1+e^{-\bar{\upsilon}})^{-\frac{1}{2}}<1$.

$$|\Delta_n|\le const\lambda^{n-m}|\Delta_m|,\quad |\Delta_n|\le const\lambda^n.$$

Пусть разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид $\rho(f(x,\Omega))=\frac{p}{q}=[k_1,k_2,\ldots,k_n],k_n\ge 2.$

Обозначим $I(\frac{p}{q})$ отрезок значения параметра Ω таких, что $\rho(\Omega)=\frac{p}{q}$. Зафиксируем некоторой $\Omega\in I(\frac{p}{q})$ и обозначим $f=f_\Omega$, $T_f=T_{f_\Omega}$. Для рационального числа вращения $\rho=\frac{p}{q}$ всегда существует по крайней мере одна периодическая траектория периода q. Пусть $\{y^{(i)}, 0\le i\le q-1\}$ произвольная периодическая траектория. Обозначим $[y_1,y_2]$ отрезок, образованный траекторий $\{y^{(i)}, 0 \le i \le q-1\}$ и содержащий особую точку t_0. Перейдем к перенормированным координатам:

$$x = y_2 + (y_1 - y_2)z$$

и определим функцию, отвечающую T_f^q в перенормированной системе координат:

$$\overline{f}(z) = \frac{1}{y_1 - y_2}[T_f^q(y_2 + (y_1 - y_2 z)) - y_2], \ z \in [0,1].$$

Обозначим d перенормированную координату точки t_0:

$$d = (t_0 - y_2)/(y_1 - y_2)$$

и определим функцию $F_d(z), z \in [0,1]$:

$$F_d(z) = \begin{cases} \dfrac{zc}{d(1-c^2) + c^2 + z(c-1)}, & z \in [0, d] \\ \dfrac{d(1-c^2) + zc^2}{d(1-c^2) + c + zc(c-1)}, & z \in [d, 1] \end{cases}$$

Теорема 1. Существует константа $c_3 > 0$ такая, что

$$\left\| \overline{f}(z) - F_d(z) \right\|_{C^2([0,]\setminus\{d\})} \le c_3 \lambda^{n\varepsilon}. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение окружности, порождённое траекторией $(y^{(i)}, 0 \le i \le q-1)$. Обозначим $\Delta_0 = [y_1, y_2]$, $\Delta_i = T_\theta^i \Delta_0, 1 \le i \le q-1$. Очевидно $T_\theta^q \Delta_0 = \Delta_0$. Не трудно показать [1], что $|\Delta_i| \le const\, \lambda^n, 1 \le i \le q-1$. Функцию $\overline{f}(z)$ можно представить как суперпозицию двух функций f_1 и f_2, отвечающих отображениям $T_\theta : \Delta_0 \to \Delta_1, T_\theta^{q-1} : \Delta_1 \to \Delta_q = \Delta_0$. Определим относительные координаты внутри отрезков Δ_i:

$$x = T_f^i y_2 + (T_f^i y_1 - T_f^i y_2)z.$$

Тогда функции f_1 и f_2 можно записать в виде:

$$f_1(z_0) = \frac{1}{(T_\theta y_1 - T_\theta y_2)}[T_\theta(y_2 + (y_1 - y_2)z_0) - T_\theta y_2]$$

$$f_2(z_1) = \frac{1}{y_1 - y_2}[T_\theta^{q-1}(T_\theta y_2 + (T_\theta y_1 - T_\theta y_2)z_1) - y_2]$$

При этом

$$\overline{f}(z) = f_2(f_1(z)). \qquad (2)$$

В работе [1] доказано

$$\left\| f_2(z_1) - \frac{Mz_1}{1+z_1(M-1)} \right\|_{C^2([0,1])} \le const\, \lambda^{n\varepsilon} \qquad (3)$$

где

$$\ln M = \sum_{i=1}^{q-1} \int_{\Delta_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy = \left(\sum_{i=0}^{q-1} \int_{\Delta_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \right) - \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy = \ln c - \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy$$

(4)

Поскольку $\left| \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \right| \le const\, \lambda^n$, получаем

$$\left\| f_2(z_1) - \frac{cz_1}{1+z_1(c-1)} \right\|_{C^2([0,1])} \le const\, \lambda^{n\varepsilon} \qquad (5)$$

Легко видеть, что функция $f_1(z_0)$ близка к кусочно-линейной функция $f_d(z_0)$, где

$$f_d(z_0) = \begin{cases} \dfrac{z_0}{c^2(1-d)+d}, & z_0 \in [0, d] \\ \dfrac{d(1-c^2)+z_0c^2}{c^2(1-d)+d}, & z_0 \in [d, 1] \end{cases} \qquad (6)$$

Поскольку $|\Delta_0| \le const\, \lambda^n$ справедлива оценка:

Используя (2)-(6) получаем (1).

Из теоремы 1 вытекает выпуклость $\overline{f}(z)$ при $0<c<1$ и вогнутость при $c>1$. Действительно, прямым вычислением легко убедится, что

$$\frac{d^2}{dz^2} F_d(z) \ge 2c^2(1-c), \;\; z \ne d \quad \text{при } 0<c<1$$

$$\frac{d^2}{dz^2} F_d(z) \le -\frac{2}{c^3}(c-1), \;\; z \ne d \quad \text{при } c>1.$$

Положим

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon \ln \lambda} \ln\left(\frac{1}{c^3} |c-1| \min\left(\frac{1}{c^3}, c^2\right)\right) \right].$$

Обозначим интервал $I(\frac{p}{q}) = \left[\Omega_1(\frac{p}{q}), \Omega_2(\frac{p}{q}) \right]$. Положим $J = [0,1] \setminus \bigcup_{0 \le \frac{p}{q} \le 1} I(\frac{p}{q})$. Обозначим меру Лебега на $[0,1]$ через λ.

Теперь сформулируем основные результате нашей работы.

Теорема 2. При всех $n > N$ справедливы следующие утверждения:

(a) если $\Omega = \Omega_1(\frac{p}{q})$ или $\Omega = \Omega_2(\frac{p}{q})$, то T_Ω имеет единственную периодическую траекторию периода q;

(в) при $\Omega \in \left(\Omega_1(\frac{p}{q}), \Omega_2(\frac{p}{q})\right)$ существует равно две периодические траектории периода q.

ЛИТЕРАТУРА:

1. K.M.Khanin and E.B.Vul. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
2. И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. –М. Наука, 1980.
3. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.
4. Усмонова, Ш. (2021). МЕДИАДИСКУРСДА ЭКСПРЕССИВЛИК ТЕНДЕНЦИЯСИ. МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ИСКУССТВО СЛОВА, 4(2).
5. Усмонова, Ш. (2021). МЕДИАДИСКУРСДА ЭКСПРЕССИВЛИК ТЕНДЕНЦИЯСИ. МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ИСКУССТВО СЛОВА, 4(2).
6.
7. Shaxnoza, U. (2022, January). THE CONCEPT OF COSMONICS AND ITS NATURE. In Conference Zone (pp. 132-133).
8. Shaxnoza, U. (2022, January). THE CONCEPT OF COSMONICS AND ITS NATURE. In Conference Zone (pp. 132-133).
9.
10. Urinova, F. A., & Usmonova, S. Y. Q. (2019). IN CONTINUOUS EDUCATION SYSTEM HUMANISTIC CHARAKTERISTICS OF PARTNERSHIP PEDOGOGY. Scientific Bulletin of Namangan State University, 1(12), 317-322.
11. Urinova, F. A., & Usmonova, S. Y. Q. (2019). IN CONTINUOUS EDUCATION SYSTEM HUMANISTIC CHARAKTERISTICS OF PARTNERSHIP PEDOGOGY. Scientific Bulletin of Namangan State University, 1(12), 317-322.
12.