BESSEL TENGLAMASIGA KELTIRILADIGAN O'ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI BIR JINSLI BO'LMAGAN TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH MASALA

Azizov Muzaffar Sulaymonovich
FarDU, matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi katta o'qituvchisi, FarPI, Oliy matematika kafedrasi katta o'qituvchisi
muzaffar.azizov.1988@mail.ru
To'lanova Dilrabo Anvarjon qizi,
FarDU, Matematika yo'nalishi 2-bosqich talabasi

Ma'lumki, Bessel tenglamasi ustida olib borilgan tadqiqot ishlari anchagina rivojlanagan. Masalan, [1-8] ishlarda Bessel tenglamasiga keltiriladigan tenglama uchun chegaraviy masala o'rganilgan bo'lib, ushbu tatqiqotlar Bessel tenglamasi ustida olib borilgan ishlarning mantiqiy davomi hisoblanadi.

Keyinchalik ushbu tadqiqotlar xususiy hosilali tenglamalar uchun boshlang'ich, chegaraviy hamda spektral masalalarni tadqiq etishda qo'llanilgan [9-17]. Yuqorida fikrlardan ko'rinadiki, Bessel tenglamasiga keltiriladigan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar muhim ahamiyatga ega.

Masalaning qo'yilishi. Quyidagi

$$y'' - xy = f(x) \qquad (1)$$

oddiy differensial tenglamani va

$$y(0) = k_{1,} \quad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} y'(x) = k_2 \qquad (2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y(x) \in C^2(-\infty, 0)$ funksiya topilsin, bu yerda $k_1, k_2 \in R$.

Teorema: *Qo'yilgan masalaning yechimi mavjud va yagonadir.*

Isbot. Masala yechimining mavjudligi.

(1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun (1) tenglamada

$$y\left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}z^2}\right) = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}z}\,Q(z),\; z = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad (3)$$

almashtirishlarni amalga oshiramiz. (3) ni (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaga qo'yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$Q'' + \frac{1}{z}Q' - \left[1 + \frac{1}{9z^2}\right]Q = 0. \qquad (4)$$

Ma'lumki (4) tenglama *Bessel tenglamasi* deyiladi, uning umumiy yechimi

$$Q(z) = C_1 I_{\frac{1}{3}}(z) + C_2 I_{-\frac{1}{3}}(z) \qquad (5)$$

ko‘rinishda aniqlanadi [1], bu yerda $I_{\pm\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^{2n\pm\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+n\pm\nu)}$.

(5) tenglikdan (3) tenglikka asosan

$$y(x)=C_1\sqrt{x}I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2\sqrt{x}I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \tag{6}$$

kelib chiqadi.

(6) funksiya (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

(1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun o‘zgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanib

$$\begin{cases} C_1'(x)\sqrt{x}I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2'(x)\sqrt{x}I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)=0, \\ C_1'(x)\sqrt{x}I_{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2'(x)\sqrt{x}I_{\frac{2}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)=f(x), \end{cases} \tag{7}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bundan $C_1'(x), C_2'(x)$larni

$$C_1'=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}xf(x)I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right), \tag{8}$$

$$C_2'=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}xf(x)I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right), \tag{9}$$

ko‘rinishda topamiz va (8) va (9) ni $[0,x]$da integrallab $C_1(x), C_2(x)$larni

$$C_1=-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^x tf(t)I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)dt+\overline{C_1}, \tag{10}$$

$$C_2=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^x tf(t)I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)dt+\overline{C_2}, \tag{11}$$

ko‘rinishda topamiz.

(10) va (11) larni (7) ga qo‘yib (1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\bar{C}_1\sqrt{x}I_{1/3}\left(-2x^{3/2}/3\right)+\bar{C}_2\sqrt{x}I_{-1/3}\left(-2x^{3/2}/3\right)+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\times$$

$$\times\int_0^x tf(t)\sqrt{x}\left[I_{1/3}\left(-2t^{3/2}/3\right)I_{-1/3}\left(-2x^{3/2}/3\right)-I_{-1/3}\left(-2t^{3/2}/3\right)I_{1/3}\left(-2x^{3/2}/3\right)\right]dt, \tag{12}$$

ko‘rinishda topamiz.

(12) ni (2) shartlarga bo‘ysundirib

$$\overline{C_1}=\frac{k_2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{9}} \quad \text{va} \quad \overline{C_2}=\frac{k_1\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{-3}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. So'ngra $C_1(x), C_2(x)$ larning qiymatlarini (12) ga qo'ysak, (1) tenglamaning yechimi quyidagicha topiladi:

$$y = \frac{k_2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{9}}\sqrt{x}I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{k_1\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{-3}}\sqrt{x}I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) -$$

$$-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^x tf(t)\sqrt{x}\left(I_{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) - I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)I_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right)dt.$$

Masala yechimining yagonaligi: Qo'yilgan masala ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarga ega bo'lsin, u holda ularning ayirmasi

$$y_1(x) - y_2(x) = y(x), \qquad (13)$$

qo'yilgan masalaga mos bir jinsli masalaning yechimi bo'ladi. Demak, qo'yilgan masalaga mos bir jinsli masalaning yechimini aynan nol ekanligini isbotlasak, (13) ga asosan qo'yilgan masala yagona yechimga ega ekanligini isbotlagan bo'lamiz.

Yuqoridan ko'rish mumkinki, (1) tenglamaga mos bir jinsli

$$y'' + xy = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi (6) ko'rinishga ega. Shuning uchun (6) umumiy yechimni (2) boshlang'ich shartlarga mos bir jinsli shartlarga bo'ysundirsak, $C_1 = C_2 = 0$ ekanligini ko'rishimiz mumkin. Bundan $y(x) \equiv 0$. Demak, (13) ga asosan $y_1(x) = y_2(x)$ bo'lib masala yechimining yagona ekanligi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. A.Q.O'rinov. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. Farg'ona 2012.

2. Azizov M.S. Rustamova S.T. Yuqori tartibli Differensial tenglamalarni Bernulli tenglamasiga keltirib yechish // "Modern problems of dynamical systems and their applications" respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, Toshkent, 2017 yil, 61-62 b.

3.Azizov M.S. Qobiljonova D.Ikkinnchi tartibli bir jinsli bo'lmagan buziladigan bir oddiy differensial tenglama ikki nuqtali chegaraviy masala // "Fan va ta'lim-tarbiyaning dolzarb masalalari" respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, Nukus 2019 y. 151-152 b.

4. Azizov M.S. Qobiljonova D. Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan singulyar koeffitsiyentli bir oddiy differensial tenglama uchun 3-chegaraviy masala // "XXI asrda ilm – fan taraqqiyotining rivojlanish istiqbollari va ularda innovatsiyalarning tutgan o'rni" mavzusidagi respublika 3-onlayn konfrensiya materiallari. 20 aprel 2019. y., 317-318 b.

5. Азизов М.С. Кобилжонова Д. Краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным

коэффициентом // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему "Актуальные проблемы внедрения инновацион ной техники и технологий на пред-приятиях по производству строительных материалов, хим. промышленности и в смежных отраслях" Фергана, ФерПИ 24-25 май 2019 г., - С. 133-135.

6. Azizov M.S. Qobiljonova D.Singulyar koeffitsiyentli bir oddiy differensial tenglama uchun 3-chegaraviy masalani Grin funksiyalari usuli bilan yechish // "Fundamental matematika muammolari va ularning tatbiqlari" mavzusidagi respublika konfrensiya materiallari Navoiy 25 may 2019 y., 133-135 b.

7. Azizov M.S. Qobiljonova D. Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan buziladigan bir oddiy differensial tenglama uchun to'rtinchi tur Bitsadze-Samarskiy masalasi // "XXI asrda ilm – fan taraqqiyotining rivojlanish istiqbollari va ularda innovatsiyalarning tutgan o'rni" mavzusidagi respublika 8-onlayn konfrensiya materiallari. 2019.y. 218-219 b.

8. Azizov M.S. To'lqinboyeva M. Ikkinchi tartibli singulyar koeffitsientli yuklangan oddiy differensial tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy masala // "Yoshlar yangi O'zbekiston, yangi renesans bunyodkorlari" mavzusidagi ilmiy-amaliy anjumani materiallari Farg'ona 2021 yil 18 iyun. 27-30 b.

9. Azizov M.S. Abdurasulov J.A. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficientin a rectangular region // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики», Фергана 12-13 март, 2020 г. -С.198-199.

10. Urinov A.K. and Azizov M.S.Boundary Value Problems for a Fourth Order Partial Differential Equation with an Unknown Right-hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 632–640.

11. Urinov A.K. and Azizov M.S. Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, №. 3, pp. 621–631.

12. Азизов М. С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя. *Scientific bulletinPhysical and Mathematical Research*, 1, 2022, с.95-103.

13. Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. *Научный вестник ФерГУ*, 2, 2022.

14. Азизов М. С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя. *Бюллетень Института математики*, 5(1), 2022, с. 14-24.

15. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*, 26(2), 2022.

16. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 32(2), 2022, с. 240-255.

17. Urinov A.K. and Azizov M.S. Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate High Even-Order Partial Differential Equation with the Bessel Operator // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 2, pp. 864–874.