CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Qobilov T.A.
Chirchiq davlat pedagogika universiteti
tursunboyqobilov95@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada chiziqli differensial tenglamalar haqida tushunchalar va ularni yechishni metodik tahlilli haqida ma’lumot berilgan va turli xil tenglamalarlar ishlab ko‘rsatilga.*

Kalit so’zlar. *Bir jinsli differensial tenglama, Koshi masalasi, Pikar teoremasi, Bernulli va Rikatti tenglamasi, xususiy yechim, o’zgarmaslarni variatsiyalash.*

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Аннотация. *В данной статье даются сведения о понятиях линейных дифференциальных уравнений и методическом анализе их решения, а также разрабатываются различные уравнения.*

Ключевые слова. *Однородное дифференциальное уравнение, задача Коши, теорема Пикара, уравнения Бернулли и Риккати, частное решение, вариация инвариантов.*

LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR SOLUTION METHODS

Abstract. *In this article, information is given about the concepts of linear differential equations and methodical analysis of their solution, and various equations are developed.*

Key words. *Homogeneous differential equation, Cauchy's problem, Picard's theorem, Bernoulli's and Riccati's equation, particular solution, variation of invariants.*

Quyidagi

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (1)$$

ko’rinishdagi y va y' ga nisbatan chiziqli bo’lgan tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Tenglamadagi $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda uzluksiz funksiyalar.

Agar (1) tenglamada $f(x)\equiv 0$ $(x\in(a,b))$ bo’lsa, u holda

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

tenglama bir jinsli deyiladi.

Agar (1) tenglamada $f(x)\neq 0$ bo’lsa, bir jinsli bo’lmagan tenglama deyiladi. Bu tenglama uchun boshlang’ich shart qo’yib, Koshi masalasini hosil qilamiz. Pikar teoremasiga ko’ra agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda uzluksiz bo’lsa, u holda $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud, shuningdek bir jinsli tenglamalarning integral chiziqlari OX o'qini kesib o'tmaydi.

Haqiqatdan ham, agar OX o'qini kesib o'tsa, u holda Koshi masalasining yechimini yagonaligi buziladi, chunki $y=0$ (OX o'qi) ham (2) tenglamaning yechimi.

Shunday qilib, quyidagi xulosaga kelamiz. Agar (2) tenglamani biron-bir yechimi *(a,b)* intervalni bitta nuqtasida nolga aylansa, u holda butun (*a,b*) intervalda nolga teng va aksincha (*a,b*) intervalni bitta nuqtasida nolga teng bo'lmasa, butun intervalda noldan farqli.

Chiziqli differensial tenglama xossalari

1. Chiziqli tenglamada x argumentni ixtiyoriy

$x=\varphi(t)$

almashtirilganda ham, o'z ko'rinishini (ya'ni chiziqliligini) o'zgartirmaydi.

2. Chiziqli tenglamada y noma'lum funksiya ixtiyoriy

$y=a(x)z+b(x)$

chiziqli almashtirilganda ham o'z ko'rinishini (ya'ni chiziqliligini) o'zgartirmaydi.

Bir jinsli (2) tenglamaning umumiy yechimini izlash uchun uni quyidagicha yozib olamiz.

$dy=-yp(x)dx$ tenglikdan

$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$, buni integrallab

$$y=ce^{-\int p(x)dx} \qquad (3)$$

ko'rinishdagi yechimini olamiz, bunda $c=const$ (3) ko'rinishidagi yechim ushbu xossalarga ega.

1. Agar y_1 (2) tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, u holda

$$y_1'+p(x)y\equiv 0 \qquad (4)$$

ayniyat o'rinli hamda

$$y=cy_1 \qquad (5)$$

funksiya ham uning yechimi bo'ladi.

2. Agar y_1 (2) ni noldan farqli xususiy yechimi bo'lsa, u holda (5) ko'rinishdagi funksiya (2) ning umumiy yechimi bo'ladi.

Maqolada bir jinsli bo'lmagan tenglama uchun o'zgarmasni variasiyalash usuli bilan tanishamiz. Bu usul ba'zan Lagranj usuli deb ham yuritiladi.

(1) tenglamaning yechimini (3) ko'rinishida qidiramiz, ya'ni

$$y=ce^{-\int p(x)dx} \qquad (6)$$

bunda, c o'zgarmasni o'rniga, $c=c(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiya deb, (6) dan hosila olamiz

$$y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (7)$$

(6) va (7) ni (1) tenglamaga qo'yamiz.

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x),$$

bundan

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

yoki

$$c'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

tenglikka ega bo'lamiz. So'nggi tenglikni integrallab,

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1, \quad c_1 = const$$

Bu ko'rinishdagi $c(x)$ funksiya qiymatini (6) ga qo'ysak,

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c_1 + \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right) \qquad (8)$$

ko'rinishdagi (1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz. (8) ni yoyib yozsak

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1e^{-\int p(x)dx} \qquad (9)$$

ko'rinishga keladi. Buning birinchi hadi (1) tenglamani biror xususiy yechimini bildirsa, ikkinchi qo'shiluvchi (2) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

Bernulli tenglamasi

Ushbu

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \qquad (n \neq 0,1) \qquad (10)$$

ko'rinishdagi tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi.

Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun (10) ni y^n ga bo'lamiz, u holda

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = f(x) \qquad (11)$$

tenglamani olamiz. Bunda

$$y^{1-n} = z \qquad \left(y = z^{\frac{1}{1-n}}\right) \qquad (12)$$

almashtirish bajaramiz.(12) ni (11) ga qo'yish uchun y' ni topamiz. Ya'ni (12) dan hosila olib,

$$(1-n)y^{-n}y' = z', \quad y' = \frac{z'}{(1-n)y^{-n}} \qquad (13)$$

endi (12) va (13) ni (11) ga qo'yamiz

$$y^{-n}\frac{z'}{(1-n)y^{-n}} + p(x)z = f(x)$$

yoki

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x)$$

Bu chiziqli tenglama, ushbu chiziqli tenglamani yuqoridagi usulda yechib, so'ng yana (x,y) o'zgaruvchilarga o'tsak Bernulli tenglamasining yechimi quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi.

$$y=\left(e^{\int(n-1)p(x)dx}\left(c+\int(1-n)f(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx\right)\right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (14)$$

Rikatti tenglamasi

Ushbu $y'+P(x)y+Q(x)\cdot y^2=R(x)$ ko'rinishdagi tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunday tenglamaning biror xususiy $y_0(x)$ yechimi ma'lum bo'lsagina, $y=y_0(x)+z$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltirish mumkin.

Misollar

1-misol. $y'-\frac{2}{x}\cdot y=2x^3$ chiziqli differensial tenglamani yeching.

Yechish: $y'-\frac{2}{x}\cdot y=0$ tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2$; $y=C(x)\cdot x^2$ deb olamiz va berilgan tenglamaga qo'yamiz

$$C'(x)\cdot x^2+2x\cdot C(x)-\frac{2}{x}\cdot C(x)x^2=2x^3$$

soddalashtirib, $C'(x)=2x$, ya'ni $C(x)=x^2$ ekanligini topamiz. Xususiy yechim $y=x^4$ ekan. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2+x^4$ ko'rinishda bo'ladi.

2-misol. $y'-\frac{1}{x}y=\frac{x}{y^2}$ Bernulli tenglamasini yeching.

Yechish: $n=-2$ ekanligidan $z=\frac{1}{y^{-2-1}}=y^3$ almashtirish o'tkazamiz. $y=z^{\frac{1}{3}}$, $y'=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot z'$ ekanligidan $\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}\cdot z'-\frac{1}{x}\cdot z^{\frac{1}{3}}=\frac{x}{z^{\frac{2}{3}}}$ kelib chiqadi.

Tomonlarni $3z^{\frac{2}{3}}$ ga ko'paytirib, $z'-\frac{3}{x}z=3x$ chiziqli tenglamani hosil qilamiz.

$z'-\frac{3}{x}z=0$ ning umumiy yechimi $z=C\cdot x^3$. $z=C(x)\cdot x^3$ deb olamiz va berilgan tenglamaga qo'yamiz. $C'=\frac{3}{x^2}$ dan $C(x)=-\frac{3}{x}$. Xususiy yechim $z=-3x^2$ ko'rinishida, umumiy yechim esa $z=C\cdot x^3-3x^2$ bo'ladi. Eski o'zgaruvchiga qaytib $y^3=Cx^3-3x^2$ Bernulli tenglamasi yechimi ekanligini topamiz.

3-misol. $y'-2xy+y^2=5-x^2$ Rikkati tenglamasining xususiy yechimi $y_1=x+2$ ma'lum bo'lsa, umumiy yechimini toping.

Yechish: $y=x+2+z$, $y'=1+z'$ almashtirish bajaramiz

$1+z'-2x(x+2+z)+(x+2+z)^2=5-x^2$.

Soddalashtirib, $z'+4z=-z^2$ Bernulli tenglamasiga ega bo’lamiz.

$\frac{1}{z^{2-1}}=t$, $z=\frac{1}{t}$, $z'=-\frac{1}{t^2}\cdot t'$ almashtirish yordamida $t'-4t=1$ chiziqli tenglamaga kelamiz. $t'-4t=0$ tenglama yechimi $t=C\cdot e^{4x}$, $t'-4t=1$ tenglama yechimi esa $t=\frac{4Ce^{4x}-1}{4}$ ekanligini topish mumkin. Mos Bernulli tenglamasini yechimi $z=\frac{4}{4Ce^{4x}-1}$ ko’rinishda, Rikkati tenglamasi umumiy yechimi esa $y=x+2+\frac{4}{4Ce^{4x}-1}$ ko’rinishda bo’ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO ‘YXATI:

1. N.S.Piskunov “Differensial va integral hisob” “O‘qituvchi” nashriyoti” Toshkent-1974

2. M.S.Saloxitdinov, G.N.Nasriddinov. Oddiy differensial tenglamalar. T. O’qituvchi.1992y.

3. K.B.Boyqo’ziev. Differensial tenglamalar. T.O’qituvchi .1988y.

4. R.Turgunbayev,Sh.Ismailov,O.Abdullayev. “ Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to’plami” Toshkent -2007.

5. Y.P.Oppoqov,N.Turgunov,I.A.Gafarov “Odiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to’plami”