GRAF UCHINING DARAJASI, TEOREMALAR VA ULARNING OLIMPIADA MASALALARIGA TADBIQLARI.

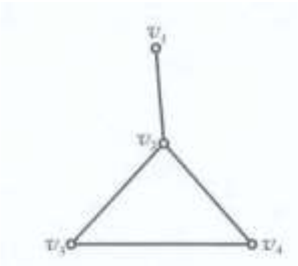
Karimova Sevinchbonu Azimjon qizi
O'zbekiston Milliy Universiteti

Bizga G graf berilgan bo'lsin va uning v uchini olaylik. v uchining darajasi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: Grafning v uchiga insident bo'lgan qirralar soni v uchining darajasi deyiladi. Bunda sirtmoq ikkita qirra deb sanaladi. G grafning v uchining darajasi $d_G(v)$ ko'rinishida belgilanadi.

Graf uchining maximal va minimal darajalari mos ravishda $\Delta(G)$ va $\partial(G)$ bilan belgilanadi.

Quyidagi rasmdagi grafda $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = d(v_4) = 2$, $\Delta = 3$, $\partial = 1$



Agar graf uchining darajasi toq bo'lsa, o'sha uch toq uch deyiladi yoki aksincha, juft uch deyiladi. Rasmdagi grafda v_1 va v_2 toq uchlar, v_3 va v_4 juft uchlardir.

Teorema. Ixtiyoriy G graf uchun uchlarining darajalari yig'indisi qirralar sonining ikkilanganiga teng, ya'ni

$d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+\ldots+ d(v_n) = 2e$

Isbot. Barcha uchlarining darajalari yig'indisi ulardan har biri, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ bilan tugovchi qirralarining umumiy sonini ko'rsatadi. Har bir qirraning ikkita uchi bo'lganligi sababli har bir qirra $d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+\ldots+ d(v_n)$ yig'indida ikki martadan sanaladi. Shuning uchun uchlarning darajalari yig'indisi qirralar sonining ikkilanganiga teng.

Masalan.

Yuqoridagi rasmdagi grafda $d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+ d(v_4) = 1+3+2+2 = 8 = 2e$

Yuqoridagi teorema Hand-Shaking Lemmasi deb ataladi. Eyler tomonidan berilgan xulosada shunday deyiladi, ko'p odamlar uchrashganda bir-biri bilan qo'l berib salomlashsa, qo'l berishlar soni juft. Bundan ikkinchi teorema kelib chiqadi.

Teorema. Grafda toq darajali uchlar soni juft.

Isbot. Bizga $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ uchlar berilgan bo'lsin, ulardan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_t$ toq uchlar, $v_{t+1}, v_{t+2}, v_{t+3}, \ldots, v_n$ uchlar esa juft uchlar bo'lsin. Teorema 1 ga ko'ra, $d(v_1)+\ldots+ d(v_t)+ d(v_{t+1})+\ldots+ d(v_n) = 2e$

$d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+\ldots+ d(v_t) = 2e- d(v_{t+1})+ d(v_{t+2})+ d(v_{t+3})+\ldots+ d(v_n)$

$d(v_{t+1})+ d(v_{t+2})+ d(v_{t+3})+\ldots+ d(v_n)$ juft ekanligidan, tenglikning o'ng tomoni ham juft ekanligi kelib chiqadi. Biroq $d(v_1)$, $d(v_2)$, $d(v_3)$, $d(v_t)$ larning barchasi toq ekanligidan, t juft boʻlishga majbur. Shunda $d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+\ldots+ d(v_t)$ yigʻindi juft boʻladi. Bundan esa toq darajali uchlar soni juft ekanligi kelib chiqadi.

Misol 1. n (n>2) ta odamlar orasida kamida 2ta odamning bir xil miqdorda doʻstlari borligini isbotlang.

Yechim. Biz n ta odamni $v_1, v_2, v_3,\ldots, v_n$ nuqlar deb belgilaymiz. Agar ikkita odam doʻst boʻlsa, ularga mos nuqtalarni tutashtiramiz va graf hosil boʻladi. Agar grafda darajalari teng boʻlgan kamida ikkita qirra topilsa, masala yechiladi. Uchlari soni n ga teng boʻlgan sodda grafning uchi koʻpi bilan n-1 ta uchga qoʻshni boʻlishi mumkin. Shuning uchun uchning darajalari qiymatlari quyidagilarni qabul qiladi:

0, 1, 2, 3, …, n-1

Biroq ulardan barchasi bajarilmaydi. Darajasi 0 ga teng boʻlgan uch qolgan ixtiyoriy uchga qoʻshni boʻla olmaydi. Bundan uchning darajasi quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin ekanligi kelib chiqadi:

0, 1, 2, …, n-2 yoki 1, 2, 3, …, n-1

Quyidagicha tengsizlik hosil boʻladi: $1\le d(v_1) < d(v_2) <\ldots< d(v_n) \le n-1$ Uchlar soni n ga teng va [1,n-1] kesmada n-1 ta natural son boʻlganligi uchun kamida ikkita uchning darajalari bir xil ekanligi kelib chiqadi.

Misol 2. Xalqaro stol tennis musobaqasida qatnashuvchi 24 ta juftlik mavjud. Ulardan ba’zilari musobaqadan oldin qoʻl beradi va bitta juftlikda boʻlgan ikki kishi bir-biri bilan qoʻl bermaydi. Oʻyindan keyin bir erkak sportchi barchadan qoʻl berishlar sonini soʻrab chiqdi va barcha javoblar turli xil boʻldi. Erkak sportchining ayol juftining qoʻl berishlar soni nechta?

Yechim. 48ta nuqtani $v, v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{46}$ deb belgilaymiz. Bunda erkak sportchi v bilan berilgan va oʻyindan qoʻl bergan sportchilarga mos nuqtalarni tutashtiruvchi qirralar ham berigan. G graf hosil boʻladi, unda $d(v_i) \le 46$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 46$ va $i\neq j$ boʻlsa, $d(v_1) \neq d(v_j)$. V dan tashqari qolgan uchlarning darajalari quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

0, 1, 2, 3, …, 46

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $d(v_i)=i$ deb olamiz, $i=0, 1, 2, 3,\ldots, 46$ v_{46} v_0 dan tashqari barcha uchga qoʻshni. Shuning uchun v_0 va v_{46} lar juftlik. v_0, v_{46} va ularga insident boʻlgan qirralarni oʻchiramiz va bizda G_1 graf hosil boʻladi. Shunga oʻxshash ravishda v_{45} va v_1, v_{44} va $v_2,\ldots$, v_{24} va v_{22} lar bir-biriga juftlik boʻladi. Bundan v ning jufti v_{23} ekanligi kelib chiqadi va erkak sportchining ayol juftining qoʻl berishlar soni 23 ga teng.

Misol 3. Bitta davlatdagi har bir shaharda boshqa shaharlarni bogʻlaydigan 100 ta yoʻl mavjud va ixtiyoriy shaharda boshqasiga boorish mumkin. Bitta yoʻl ta’mirlash uchun yopildi. Hali ham ixtiyoriy shahardan boshqasiga borish mumkinligini isbotlang.

Yechim. Yopilgan yoʻl AB boʻlsin deb faraz qilaylik. Biz B ga hali ham A dan yetib borish mumkinligini isbot qilishimiz kerak. Teskaridan faraz qilamiz, Adan tashqari A dan tashkil topgan bogʻlangan qism grafdagi uchlarning darajalari juft. U holda teorema 2 ga koʻra ziddiyat hosil boʻladi.

Misol 4. Bitta davlatda 20ta tennis klubi a'zolari 14 ta yakkalik sport musobaqalarini o'tkazadi va har bir kishi kamida bir marta o'ynaydi. 12 ta a'zolarining barchasi turli xil bo'lgan 6 ta yakkalik sport musobaqasi bor ekanligini isbotlang.

Yechim. 20 ta qatnashuvchini 20 ta $v_1, v_2, \ldots, v_{20}$ grafning uchlari deb belgilaylik va ikkita a'zoga mos uchni bog'lovchi qirra mavjud bo'lsin. So'ng biz 14 ta qirrasi mavjud bo'lgan G graf hosil qilamiz. Barcha uchlarning darajalarini d_i , i = 1, 2, 3, …, 20 , $d_i \geq 1$ deb belgilaylik. Teorema 1 ga ko'ra,

$d(v_1)+ d(v_2)+ d(v_3)+\ldots+ d(v_{20}) = 2\times14 = 28$

v_i ga insident bo'lgan qirralarni o'chiramiz. Har bir qirra ikki martadan sanalgani uchun quyidagi tenglik o'ribli bo'ladi:

$d(v_1)-1+ d(v_2)-1+ d(v_3)-1+\ldots+ d(v_{20})-1 = 28 – 20 = 8$

G grafning qirralari o'chirilganidan keyin unda kamida 14-8 = 6 ta qirrasi mavjud va G' dagi har bir nuqtaning darajasi ko'pi bilan 1 ga teng. Shuning uchun 6ta qirraga insident bo'lgan 12 taning barchasi har xil. Bundan 6 ta yakkalik sport musobaqasidagi 12 ta qatnashchining barchasi turli xil ekanligi kelib chiqadi.

Misol 5. $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ tekislikda joylashgan nuqtalar to'plami bo'lsin va ixtiyoriy ikkita nuqta orasidagi masofa kamida 1 ga teng. Bu yerda 3n ta juftlik mavjud bo'lib, juftliklardagi har bir ikkita nuqtaning orasidagi masofa aynan 1 ga teng bo'lishini isbotlang.

Yechim. N ta nuqta ikkita nuqtaning orasidagi masofa 1 ga teng bo'lgan qirralari mavjud bo'lgan n ta uch orqali ifodalanadi va G graf hosil bo'ladi. G grafdagi qirralar sonini e bilan belgilaylik. Shu narsa aniqki, x_i ga qo'shni bo'lgan uch markazi x_i va radiusi 1 ga teng bo'lgan aylanada yotadi. S dagi 2 ta nuqta orasidagi masofa 1 dan kam bo'lmagani uchun aylanada ko'pi bilan 6 ta nuqta bor. Shuning uchun $d(x_i) \leq 6$.

Birinchi teoremaga ko'ra,

$d(x_1)+ d(x_2)+ d(x_3)+\ldots+ d(x_n) = 2e$,

$6n \geq 2e$, $e \leq 3n$

Bundan G grafdagi qirralar soni 3n dan oshib keta olmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun n ta nuqtalarda ko'pi bilan har bir juftlikning orasidagi masofa aynan 1 ga teng bo'lgan 3n ta juftlik mavjud.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1.Xiong Bin, Zheng Zhongyi; Graph theory (2010)

2.H. To'rayev, I. Azizov, S. Otaqulov; Kombinatorika va graflar nazariyasi (2009)