ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЎЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМА

Турсунова Эргашой Ғайратжон қизи
Фарғона давлат университети , Мураббийлар кўчаси 19 уй.
E-mails: etursunova1996@gmail.com

Аннотатция: *Ушбу мақолада икки ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли тўла дифференциалидан фойдаланиб, тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламалар тадқиқ этилган.*

Калит сўзлар: *Тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама, тўртинчи тартибли тўла дифференциалли функция, умумий ечим.*

FOURTH ORDER TOTAL DIFFERENTIAL EQUATION

Annotation. *In this paper , fourth order total differential equations are researched using the higher-order total differential of two-variable functions.*

Key words. *Fourth order total differential equation, fourth order total differential function, solution.*

ПОЛНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. *В этой статье исследуются уравнения полного дифференциала четвертого порядка с использованием полного дифференциала функций двух переменных более высокого порядка.*

Ключевые слова. *Уравнение полного дифференциала четвертого порядка, функция полного дифференциала четвертого порядка, решение.*

Кириш

Биринчи тартибли тўла дифференциалли оддий дифференциал тенгламалар ҳақида кўплаб адабиётлардан маьлумот олиш мумкин [1-2], [5-6]. Шунингдек, иккинчи, учинчи ва n-тартибли тўла дифференциалли тенгламалар [3-4] ишларда ўрганилган. Ушбу мақолада тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламаларни умумий ечимини тўла дифференциалли бўлиш шартларини қўллаб топиш ўрганилган.

Таъриф. *Агар*

$$M_{40}(x,y)dx^4+4M_{31}(x,y)dx^3dy+6M_{22}dx^2dy^2+4M_{13}dxdy^3+M_{04}(x,y)dy^4=0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламада $M_{40}(x,y), M_{31}(x,y), M_{22}(x,y), M_{13}(x,y)$, $M_{04}(x,y)$ *функциялар узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлиб, булар учун қуйидаги [2.54б]*

$$\frac{\partial M_{40}}{\partial y}=\frac{\partial M_{31}}{\partial x},\ \frac{\partial M_{31}}{\partial y}=\frac{\partial M_{22}}{\partial x},\ \frac{\partial M_{22}}{\partial y}=\frac{\partial M_{13}}{\partial x},\ \frac{\partial M_{13}}{\partial y}=\frac{\partial M_{04}}{\partial x} \qquad (2)$$

муносабат ўринли бўлса, (1) тенглама тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама дейилади, бунда $\frac{\partial M_{40}}{\partial y},\frac{\partial M_{31}}{\partial x},\frac{\partial M_{31}}{\partial y},\frac{\partial M_{22}}{\partial x},\ \frac{\partial M_{22}}{\partial y},$ $\frac{\partial M_{13}}{\partial x},\frac{\partial M_{13}}{\partial y},\frac{\partial M_{04}}{\partial x}$ *функциялар бирор соҳада узлуксиз функциялар.*

(1) тенгламанинг чап қисми бирор $u(x,y)$ функциянинг тўртинчи тартибли тўлиқ дифференциали, яъни [1.31б]

$$d^4u=M_{40}(x,y)dx^4+4M_{31}(x,y)dx^3dy+6M_{22}dx^2dy^2+$$
$$+4M_{13}dxdy^3+M_{04}(x,y)dy^4 \qquad (3)$$

бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}=M_{40}(x,y),\ \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^3\partial y}=M_{31}(x,y),\ \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}=M_{22}(x,y),$$
$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x\partial y^3}=M_{13}(x,y),\ \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}=M_{04}(x,y). \qquad (4)$$

эканлигидан, юқоридаги (2) шартлар келиб чиқиши, математик анализ курсидан маълум.

(4) тенгликларнинг учинчисидан $u(x,y)$ функцияни

$$u(x,y)=\iiint\int M_{22}(x,y)dx^2dy^2=C_\gamma(y)+C_\lambda(x)$$

кўринишида бўлсин, бу ерда $C_\gamma(y),C_\lambda(x)-$ихтиёрий ўзгармаслар($\gamma,\lambda\in N$). (4) тенгликларнинг биринчиси, иккинчиси, тўртинчиси ва бешинчисидан

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iint M_{22}(x,y)dy^2\right]+y\cdot C_3^{IV}(x)+C_4^{IV}(x)=M_{40}(x,y), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^3\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int M_{22}(x,y)dy\right]+C_3'''(x)=M_{31}(x,y), \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M_{22}(x,y)dx\right]+C_1'(x)=M_{13}(x,y), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\iint M_{22}(x,y)dx^2\right]+x\cdot C_1''(y)+C_2''(y)=M_{04}(x,y). \quad (8)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

(5), (6), (7) ва (8) тенгликлардан $C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(x)$, $C_4(x)$ ларни топамиз. Топилган натижаларни $u(x,y)$ функцияга олиб бориб, умумий ечимни топамиз.

Юқорида айтилганларни қуйида берилган мисол орқали кўриб чиқамиз.

Мисол. Ушбу

$$120xy^3dx^4 + 4\cdot 180x^2y^3dx^3dy + 6\cdot\left(120x^3y + 40y^3\right)dx^2dy^2 +$$

$$+4\cdot\left(30x^4 + 120xy^2\right)dxdy^3 + 120yx^2dy^4 = 0$$

тўртинчи тартибли тўла дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. Бу ерда $M_{40}(x,y)=120xy^3$, $M_{31}(x,y)=180x^2y^2$, $M_{22}(x,y)=120x^3y+40y^3$, $M_{13}(x,y)=30x^4+120xy^2$, $M_{04}(x,y)=120yx^2$.

Берилган тенгламани тўла дифференциаллик шартларини қаноатлантиришини текширамиз:

$$\frac{\partial M_{40}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[120xy^3\right] = 360xy^2,\ \frac{\partial M_{31}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[180x^2y^2\right] = 360xy^2,$$

яъни $$\frac{\partial M_{40}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{31}(x,y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{31}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[180x^2y^2\right] = 360x^2y,$$

$$\frac{\partial M_{22}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[120x^3y + 40y^3\right] = 360x^2y,$$ яъни

$$\frac{\partial M_{31}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{22}(x,y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{22}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[120x^3y + 40y^3\right] = 120x^3 + 120y^2$$

$$\frac{\partial M_{13}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[30x^4 + 120xy^2\right] = 120x^3 + 120y^2,$$

яъни $$\frac{\partial M_{22}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{13}(x,y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_{13}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[30x^4 + 120xy^2\right] = 240xy,\ \frac{\partial M_{04}(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[120yx^2\right] = 240xy,$$

яъни $$\frac{\partial M_{13}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M_{04}(x,y)}{\partial x}.$$

Демак, берилган тенглама тўртинчи тартибли тўла дифференциалли тенглама экан. Бу эса бизга берилган тенглама бирор $u(x,y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлиши келиб чиқади. $u(x,y)$ функцияни тиклаш мақсадида $M_{22}(x,y)$ функциядан аввал y ни ўзгармас деб x бўйича икки марта интеграллаб,

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\int M_{22}(x,y)dx=\int 120x^3ydx+\int 40y^3dx=30x^4y+40y^3x+C_1(y),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)=\int 30x^4ydx+\int 40y^3xdx+\int C_1(y)dx+C_2(y)=$$

$$=6x^5y+20y^3x^2+x\cdot C_1(y)+C_2(y),$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Сўнгра бу тенгликдан xни ўзгармас деб, y бўйича икки марта интеграллаб, $u(x,y)$ функцияни топамиз:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}u(x,y)=\int 6x^5ydy+\int 20y^3x^2dy+x\cdot\int C_1(y)dy+\int C_2(y)dy+C_3(x)=$$

$$=3x^5y^2+5y^4x^2+x\cdot\int C_1(y)dy+\int C_2(y)dy+C_3(x),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}u(x,y)=\int 3x^5y^2dy+\int 5y^4x^2dy+x\cdot\iint C_1(y)dy^2+\iint C_2(y)dy^2+\int C_3(x)dy+C_4(x)=$$

$$=x^5y^3+y^5x^2+x\cdot\iint C_1(y)dy^2+\iint C_2(y)dy^2+y\cdot C_3(x)+C_4(x).$$

Топилган $u(x,y)$ функциядан x бўйича тўрт марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{40}(x,y)$ функцияга, y бўйича тўрт марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{04}(x,y)$ функцияга, x бўйича уч марта y бўйича бир марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{31}(x,y)$ функцияга, x бўйича бир марта y бўйича уч марта хусусий ҳосилани ҳисоблаб, $M_{13}(x,y)$ функцияга тенглаб, $C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(x)$ ва $C_4(x)$ ларни қуйидагича топамиз:

$$\frac{\partial^4u(x,y)}{\partial x^4}=120xy^3+C_3^{IV}(x)\cdot y+C_4^{IV}(x)=120xy^3,$$

$$\frac{\partial^4u(x,y)}{\partial x^3\partial y}=180x^2y^2+C_3'''(x)=180x^2y^2,\ \ C_3''(x)=k_1,$$

$$C_3'(x)=k_1x+k_2,\ C_3(x)=\frac{1}{2}k_1x^2+k_2x+k_3,$$

$$\frac{\partial^4u(x,y)}{\partial x\partial y^3}=30x^4+120xy^2+C_1'(y)=30x^4+120xy^2,\ \ C_1'(y)=0,\ \ C_1(y)=m_1,$$

$$\frac{\partial^4u(x,y)}{\partial y^4}=120x^2y+x\cdot C_1''(y)+C_2''(y)=120x^2y,\ \ x\cdot C_1''(y)+C_2''(y)=0,$$

$$C_4(x)=\frac{1}{6}k_4x^3+\frac{1}{2}k_5x^2+k_6x+k_7\ ,\ C_2(y)=m_2y+m_3.$$

$C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(x)$ ва $C_4(x)$ ларни $u(x,y)$ функцияга олиб бориб қўйиб,

$$u(x,y)=x^5y^3+y^5x^2+x\cdot\iint m_1dy^2+\iint(m_2y+m_3)dy^2+$$

$$+y\cdot\left(\frac{1}{2}k_1x^2+k_2x+k_3\right)+\frac{1}{6}k_4x^3+\frac{1}{2}k_5x^2+k_6x+k_7=$$

$$=x^5y^3+y^5x^2+\frac{1}{2}m_1xy^2+\frac{1}{6}m_2y^3+\frac{1}{2}m_3y^2+\frac{1}{2}k_1x^2y+$$

$$+k_2xy+k_3y+\frac{1}{6}k_4x^3+\frac{1}{2}k_5x^2+k_6x+k_7.$$

функцияни ҳосил қиламиз.Демак, биз излаган функция

$$u(x,y)=x^5y^3+y^5x^2+x\cdot\iint m_1dy^2+\iint(m_2y+m_3)dy^2+$$

$$+y\cdot\left(\frac{1}{2}k_1x^2+k_2x+k_3\right)+\frac{1}{6}k_4x^3+\frac{1}{2}k_5x^2+k_6x+k_7=$$

$$=x^5y^3+y^5x^2+\frac{1}{2}m_1xy^2+\frac{1}{6}m_2y^3+\frac{1}{2}m_3y^2+\frac{1}{2}k_1x^2y+$$

$$+k_2xy+k_3y+\frac{1}{6}k_4x^3+\frac{1}{2}k_5x^2+k_6x+k_7.$$

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Ғ.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. –Тошкент: Ўзбекистон,1994.

2. Ergashev.T.G. Differensial tenglamalar fanidan misol va masalalar yechish. – Namangan, 2012.

3. Азизов М. ва Турсунова Э. Иккинчи ва учинчи тартибли тўла дифференциалли тенгламалар ҳақида. “Ўзбекистонда илмий-амалий тадқиқотлар” мавзусидаги Республика 15-кўп тармоқли илмий масофавий онлайн конференциясининг 15-сони,30 апрель.

4. Азизов М. ва Турсунова Э. n-тартибли тўла дифференциалли тенгламалар ҳақида. “Ўзбекистонда илмий-амалий тадқиқотлар” мавзусидаги Республика 15-кўп тармоқли илмий масофавий онлайн конференциясининг 15-сони,30 апрель.

5. Ўринов А.Қ., Қосимов Х.Н., Ғозиев Қ.С. Дифференциал тенгламалар фанидан услубий кўрсатма. II қисм. -Фарғона: 2002.

6. O’rinov A.Q., Mirzakarimov E.M. Oddiy differensial tenglamalar Maple tizimida. – Toshkent: Navro’z, 2013.